Пусть на некотором промежутке X определена некоторая функция $y = f(x)$.

Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится по общему правилу дифференцирования:

1. Придавая аргументу x приращение Δx и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение $x + \Delta x$, находим наращенное значение функции:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

2. Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

3. Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, т.е. составляем отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Этот предел и есть производная от функции $y = f(x)$.

Итак:

Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется отношение приращения функции Δf в этой точке к приращению Δx аргумента, при стремлении последнего к нулю.

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \textit{при} \ \Delta x \to 0.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием*.

Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке *(a, b)*. Тогда $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей *MP* к графику функции (рис.).

$$_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке *(*x_0*, f(*x_0*))*.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение нормали к кривой:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Фактически производная функции показывает скорость изменения функции, т.е. как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции *f(t)*, где *t*- время, а *f(t)*- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Пример 1. Написать уравнение касательной к графику функции $y = x + \frac{1}{x+1}$ в точке А(0;1).

Решение. Функция $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ определена, непрерывна и дифференцируема на множестве $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Выпишем уравнение касательной

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

$f(x_0) = 0 + \frac{1}{0+1} = 1;$

$f'(x) = (x)' + \left((x+1)^{-1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2};$

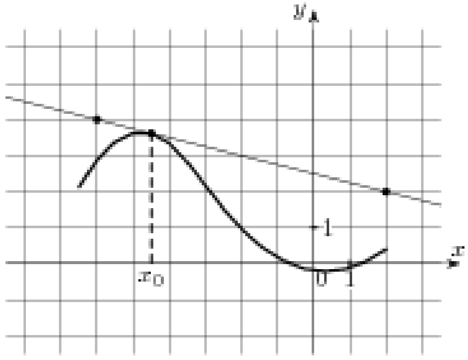
$f'(x) = 1 - \frac{1}{(0+1)^2} = 0.$

Найдем искомое уравнение касательной:

$y = 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1.$

Ответ: $y = 1$.

Пример 2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение:

Воспользуемся геометрическим смыслом производной функции $y = f(x)$: $f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке касания x_0.

Для вычисления тангенса угла α обратим внимание на прямоугольный треугольник (две остроугольные вершины которого уже изображены на рисунке к данной задаче). По рисунку найдем длины катетов: вертикальный катет равен 2, горизонтальный катет равен 8.

Следовательно тангенс острого угла рассматриваемого прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{8} = 0,25$.

Обратим внимание, что угол наклона касательной в точке x_0 тупой, тогда $f'(x_0) = tg\alpha < 0$, т.е. $f'(x_0) = -0.25$

Ответ: -0.25