РАЗДЕЛ 14. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Комментарий. Задачи с параметрами традиционно являются сложными заданиями в структуре ЕГЭ, требующими от абитуриента не только владения всеми методами и приемам решения различных уравнений и неравенств, но и развитого математического мышления, логики. Данный раздел содержит достаточно большое количество примеров, большинство из которых сопровождено решением и исчерпывающим комментарием.

Логика рассмотрения примеров следующая:

- понятие «параметр»;
- решение линейных уравнений и неравенств, содержащих параметры
- решение квадратных уравнений и неравенств, содержащих параметры
- решение задач с параметрами с применением свойств функций
- решение задач с параметрами с использованием производной функции
- параметры в тригонометрических уравнениях и неравенствах
- решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств, содержащих параметры

Пример 1. Решите уравнение при всех значениях параметра: $ax-a=4-x$.

Решение.

$ax-a=4-x$

$ax+x=a+4$

Приведем к виду:

$(a+1)x=a+4$

При $a=-1$, $0\cdot x=3,\ x\in\varnothing$.

При $a\neq-1$, $x=\dfrac{a+4}{a+1}$.

Ответ: При $a=-1$, $x\in\varnothing$;

при $a\neq-1$, $x=\dfrac{a+4}{a+1}$.

Пример 2. Решите уравнение:

$2(x-a)-3x=-2a-x$.

Решение.

$2x-2a-3x+x=-2a$

$2x-3x+x=2a-2a$

$0\cdot x=0\cdot a\ \Rightarrow x$ и a — любые

Ответ: x — любое число при любом значении $a\in R$.

Пример 3. Решите уравнение:

$m(2x-1)-m=2m(x-1)+x-3.$

Решение.

$2mx-m-m=2mx-2m+x-3$

$\cancel{2mx}\cancel{-2m}\cancel{-2mx}+\cancel{2m}-x=-3$

$-x=-3$

$x=3$

Ответ: $x=3$ при любом значении $m\in R$.

Пример 4. Решите уравнение:

$\left(a^2-1\right)x=a+1.$

Решение.

$a^2=1$

$a=\pm1$

Если $a=1$, тогда уравнение принимает вид $0\cdot x=2$ и решений не имеет;

Если $a=-1$, тогда уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, и очевидно x — любое;

Если $a\neq\pm1$, тогда $x=\dfrac{a+1}{\left(a^2-1\right)}=\dfrac{\cancel{a+1}}{(a-1)\cancel{(a+1)}}=\dfrac{1}{a-1}$.

Ответ: При $a=1$, $x\in\varnothing$;

при $a=-1$, $x\in R$;

при $a\neq\pm1$, $x=\dfrac{1}{a-1}$.

Пример 5. Решите уравнение с параметром *a*:

$\left(a^2-2a+1\right)x=a^2+2a-3.$

Решение.

$\left(a^2-2a+1\right)x=a^2+2a-3$

$a^2-2a+1=0$

$D=4-4=0$

$a=\dfrac{2}{2}=1$

При $a=1$, $0\cdot x=0,\ x\in R$.

При $a\neq1$, $x=\dfrac{a^2+2a-3}{a^2-2a+1}=\dfrac{\cancel{(a-1)}(a+3)}{(a-1)^{\cancel{2}}}=\dfrac{a+3}{a-1}$.

Ответ: При $a=1$, $x\in R$;

при $a\neq1$, $x=\dfrac{a+3}{a-1}$.

Пример 6. Решите уравнение с параметром *a*:

$\left(a^3-a^2-4a+4\right)x=a-1.$

Решение.

Упростим выражение в скобках:

$a^3-a^2-4a+4=a^3-4a-\left(a^2-4\right)=a\left(a^2-4\right)-\left(a^2-4\right)=$

$=\left(a^2-4\right)\left(a-1\right)=\left(a-2\right)\left(a+2\right)\left(a-1\right)$

$\left(a-2\right)\left(a+2\right)\left(a-1\right)x=a-1$

$\left(a-2\right)\left(a+2\right)\left(a-1\right)=0$

$a=2$

$a=-2$

$a=1$

При $a=2$, $0\cdot x=1,\ x\in\varnothing$.

При $a=-2$, $0\cdot x=-3,\ x\in\varnothing$.

При $a=1$, $0\cdot x=0,\ x\in R$.

При $\begin{cases} a\neq -2 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{cases}$, $x=\dfrac{\cancel{a-1}}{\left(a^2-4\right)\cancel{\left(a-1\right)}}=\dfrac{1}{a^2-4}$.

Пример 7. Решите уравнение:

$$\frac{5}{ax-4}=\frac{1}{9x-a}. \qquad (1)$$

Решение.

Допустимыми значениями x и a будут значения, при которых общий знаменатель не равен нулю:

$ax-4\neq 0$ и $9x-a\neq 0$

$ax\neq 4$ $\qquad 9x\neq a$

$x\neq \dfrac{4}{a}$ $\qquad x\neq \dfrac{a}{9}$

Приведем (1) к простейшему виду:

$45x-5a-ax+4=0$

$$\left(45-a\right)x=5a-4 \qquad (2)$$

Найдем a, при которых (1) и (2) не равносильны или (1) не имеет числового смысла. Подставив в (2) $x=\dfrac{4}{a}$ и $x=\dfrac{a}{9}$.

$x=\dfrac{4}{a}$	$x=\dfrac{a}{9}$
$\left(45-a\right)\dfrac{4}{a}=5a-4$	$\left(45-a\right)\dfrac{a}{9}=5a-4$
$\dfrac{180}{a}-4=5a-4$	$5a-\dfrac{a^2}{9}=5a-4$
$180-4a=5a^2-4a$	$45a-a^2=45a-36$
$-5a^2=-180$	$-a^2=-36$
$a^2=36$	$a^2=36$
$a_{1,2}=\pm 6$	$a_{1,2}=\pm 6$

Таким образом, при $a=\pm 6$ уравнение (1) не имеет числового смысла, т. е. $a=\pm 6$ — недопустимые значения параметра a для (1). При $a=\pm 6$ можем решать уравнение (2).

Если $45 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 45$, то уравнение (2), а вместе с ним и уравнение (1) имеют единственное решение:

$$x = \frac{5a-4}{45-a}.$$

Если $a = 45$, то уравнение решений не имеет, т.к. $0 \cdot x = 221$.

Ответ: При $a \neq \pm 6$, $a \neq 45$, $x = \frac{5a-4}{45-a}$;

при $a = 45$, $a = \pm 6$ $x \in \varnothing$.

Пример 8. Решить уравнение и определить знаки корней:

$ax + 2x + 3 = 1 - x$.

Решение.

$ax + 2x + x = 1 - 3$

$ax + 3x = -2$

$(a+3)x = -2$

При $a = -3$, $0 \cdot x = -2$, $x \in \varnothing$.

При $a \neq -3$, $x = -\frac{2}{a+3}$.

Решение будет положительным, если:

$(a+3)(-2) > 0$

$-2a - 6 > 0$

$a + 3 < 0$

$a < -3$

Решение будет отрицательным, если:

$(a+3)(-2) < 0$

$-2a - 6 < 0$

$a + 3 > 0$

$a > -3$

Ответ:

При $a = -3$, $x \in \varnothing$;

при $a \neq -3$, $x = -\frac{2}{a+3}$;

при $a < -3$, $x > 0$;

при $a > -3$, $x < 0$.

Пример 9. Найти все m, при каждом из которых решение уравнения $5x - 18m - 21 = 5mx - m$ больше 3.

Решение.

Сначала решим уравнение:

$5x - 18m - 21 = 5mx - m$

$5x - 18m - 21 - 5mx + m = 0$

$(5 - 5m)x = 17m + 21$

При $5 - 5m = 0 \Rightarrow m = 1$, $0 \cdot x = 38$, $x \in \varnothing$.

При $m \neq 1$, $x = \frac{17m+21}{5-5m}$.

Найдем те значения m, при которых решение уравнения больше 3, т.е. $x>3$.

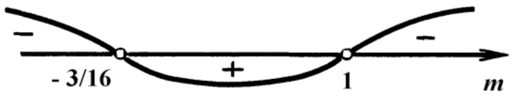
$$\frac{17m+21}{5-5m}>3$$

$$\frac{17m+21}{5-5m}-3>0$$

$$\frac{17m+21-15+15m}{5-5m}>0$$

$$\frac{32m+6}{5-5m}>0$$

$$\frac{16m+3}{1-m}>0$$



Ответ: $-\frac{3}{16}<m<1$.

Пример 10. Найти все b, при каждом из которых решение уравнения $6-3b+4bx=4b+12x$ меньше 1.

Решение.

Сначала решим уравнение:

$$6-3b+4bx=4b+12x$$

$$-3b-4b+4bx=12x-6$$

$$-7b+4bx=12x-6$$

$$4bx-12x=7b-6$$

$$(4b-12)x=7b-6$$

При $4b-12=0 \Rightarrow b=3$, $0\cdot x=15$, $x\in\varnothing$.

При $b\neq 3$, $x=\frac{7b-6}{4b-12}$.

Найдем те значения b, при которых решение уравнения меньше 1, т.е. $x<1$.

$$\frac{7b-6}{4b-12}<1$$

$$\frac{7b-6}{4b-12}-1<0$$

$$\frac{7b-6-4b+12}{4b-12}<0$$

$$\frac{3b+6}{4b-12}<0$$

$$\frac{b+2}{b-3}<0$$

Ответ: $-2<b<3$.

Пример 11. Определить значения параметра k, при которых корни уравнения $\frac{3}{8x-k}=\frac{1}{kx-2}$ положительны.

Решение.

$$\frac{3}{8x-k}=\frac{1}{kx-2} \qquad (1)$$

Допустимыми значениями x и k будут значения, при которых общий знаменатель не равен нулю:

$8x\neq k$ и $kx\neq 2$

$x\neq\frac{k}{8}$ $\qquad$ $x\neq\frac{2}{k}$

Приведем уравнение (1) к простейшему виду:

$3kx-6=8x-k$

$3kx-8x=6-k$

$$(3k-8)x=6-k \qquad (2)$$

Подставив $x=\frac{k}{8}$ и $x=\frac{2}{k}$ в (2), тем самым мы найдем k при которых (1) не имеет числового смысла.

$x=\frac{k}{8}$

$(3k-8)\frac{k}{8}=6-k$

$\frac{3k^2}{8}-k=6-k$

$3k^2-8k=48-8k$

$3k^2=48$

$k^2=16$

$k_{1,2}=\pm4$

$x=\frac{2}{k}$

$(3k-8)\frac{2}{k}=6-k$

$6-\frac{16}{k}=6-k$

$6k-16=6k-k^2$

$k^2=16$

$k_{1,2}=\pm4$

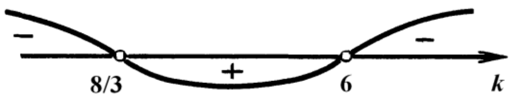
Таким образом, при $k=\pm4$ уравнение (1) не имеет числового смысла, т.е. $k=\pm4$ — недопустимые значения параметра k для (1).

$3k-8\neq0$

$3k\neq8$

$k\neq\frac{8}{3}$

Если $k \neq \frac{8}{3}$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{6-k}{3k-8}$, которое будет положительным, если $(3k-8)(6-k) > 0$ при $\frac{8}{3} < k < 6$ с учетом $k \neq 4$, получаем $k \in \left(\frac{8}{3}; 4\right) \cup (4; 6)$.



Ответ: $k \in \left(\frac{8}{3}; 4\right) \cup (4; 6)$.

Пример 12. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корень уравнения $3x(a+4) = 6a+35$ в три раза меньше корня уравнения $2(-x-1) = 3(2-x)$.

Решение.

$2(-x-1) = 3(2-x)$

$-2x-2 = 6-3x$

$-2x+3x = 6+2$

$x = 8$

Если $x = 8$ корень уравнения $2(-x-1) = 3(2-x)$, то $x = \frac{8}{3}$ корень уравнения $3x(a+4) = 6a+35$ (по условию).

Подставим $x = \frac{8}{3}$ в уравнение $3x(a+4) = 6a+35$:

$\cancel{3} \cdot \frac{8}{\cancel{3}}(a+4) = 6a+35$

$8a+32 = 6a+35$

$8a-6a = 35-32$

$2a = 3$

$a = \frac{3}{2}$

Ответ: $a = \frac{3}{2}$.

Пример 13. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корень уравнения $2x-28{,}5 = 2a(6x-1)+35$ в два раза больше корня уравнения $4x+1 = 2(3-2x)$.

Решение.

$4x+1 = 2(3-2x)$

$4x+1 = 6-4x$

$8x = 5$

$x = \frac{5}{8}$

Если $x=\frac{5}{8}$ корень уравнения $4x+1=2(3-2x)$, то $x=\frac{10}{8}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$ корень уравнения $2x-28,5=2a(6x-1)+35$ (по условию).

Подставим $x=\frac{5}{4}$ в уравнение $2x-28,5=2a(6x-1)+35$:

$2x-28,5=2a(6x-1)+35$

$2x-28,5=12ax-2a+35$

$2x-12ax=35+28,5-2a$

$2x(1-6a)=63,5-2a$

$2\cdot\frac{5}{4}(1-6a)=63,5-2a$

$\frac{5}{2}(1-6a)=63,5-2a$

$2,5-15a=63,5-2a$

$2a-15a=63,5-2,5$

$-13a=61$

$a=-\frac{61}{13}$

$a=-4\frac{9}{13}$

Ответ: $a=-4\frac{9}{13}$.

Пример 14. Решить уравнение:

$\frac{ax}{3a-x}=2$. (1)

Решение.

Допустимыми значениями x и a будут значения, при которых общий знаменатель не равен нулю:

$3a-x\neq 0$

$x\neq 3a$

Приведем уравнение (1) к простейшему виду:

$ax=6a-2x$

$ax+2x=6a$

$(a+2)x=6a$

$a\neq -2$

$x=\frac{6a}{a+2}$

Подставим $x=3a$ в уравнение $(a+2)x=6a$, тем самым мы найдем a при которых уравнение $\frac{ax}{3a-x}=2$ не имеет числового смысла.

$(a+2)3a=6a$

$3a^2+6a=6a$

$3a^2=0$

$a = 0$

Таким образом, при $a = 0$ уравнение (1) не имеет числового смысла.

Ответ: При $a \neq -2$ и $a \neq 0$, $x = \dfrac{6a}{a+2}$;

при $a = -2$ и $a = 0$, $x \in \varnothing$.

Пример 15. Решить уравнение:

$$\frac{ax-4}{a-x} = 1.$$

Решение.

Допустимыми значениями x и a будут значения, при которых общий знаменатель не равен нулю:

$$x \neq a$$

$$ax - 4 = a - x$$

$$ax + x = a + 4$$

$$(a+1)x = a + 4$$

$a \neq -1$	$a = -1$
$x = \dfrac{a+4}{a+1}$	$0 \cdot x = 3 \Rightarrow x \in \varnothing$

Подставим $x = a$ в уравнение $(a+1)x = a+4$, тем самым мы найдем a при которых уравнение $\dfrac{ax-4}{a-x} = 1$ не имеет числового смысла.

$$a^2 + a = a + 4$$

$$a^2 = 4$$

$$a_{1,2} = \pm 2$$

Ответ: При $a \neq -1$, $a \neq \pm 2$, $x = \dfrac{a+4}{a+1}$;

при $a = -1$ и $a = \pm 2$, $x \in \varnothing$.

Пример 16. Решить уравнение:

$$\frac{x-3m}{x^2-9} - \frac{2m+3}{x+3} = \frac{m-5}{x-3}.$$

Решение.

$$x \neq \pm 3$$

$$x - 3m - 2mx + 6m - 3x + 9 = mx + 3m - 5x - 15$$

$$\cancel{3m} - 2x - 2mx + 9 - mx \cancel{- 3m} + 5x + 15 = 0$$

$$-3mx + 3x + 24 = 0$$

$$mx - x - 8 = 0$$

$$(m-1)x = 8$$

$m \neq 1$	$m = 1$
$x = \dfrac{8}{m-1}$	$0 \cdot x = 8 \Rightarrow x \in \varnothing$

Подставим $x = 3$ и $x = -3$ в уравнение $(m-1)x = 8$, тем самым мы найдем a при которых уравнение $\dfrac{x-3m}{x^2-9} - \dfrac{2m+3}{x+3} = \dfrac{m-5}{x-3}$ не имеет числового смысла.

$x=3$ $\quad$ $x=-3$

$(m-1)3=8$ $\quad$ $(m-1)(-3)=8$

$3m-3=8$ $\quad$ $3-3m=8$

$3m=11$ $\quad$ $-3m=5$

$m=\dfrac{11}{3}$ $\quad$ $m=-\dfrac{5}{3}$

Ответ: При $m\neq\dfrac{11}{3}$, $m\neq-\dfrac{5}{3}$, $m\neq1$, $x=\dfrac{8}{m-1}$;

при $m=\dfrac{11}{3}$, $m=-\dfrac{5}{3}$, $m=1$, $x\in\varnothing$.

Пример 17. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнение не имеет решения:

$a^2x+2ax+x=1$.

Решение.

$(a^2+2a+1)x=1$

Уравнение решения не имеет, если:

$a^2+2a+1=0$

$D=4-4=0$

$a=\dfrac{-2}{2}=-1$

Ответ: При $a=-1$ — уравнение не имеет решений.

Пример 18. Решить уравнение относительно x в зависимости от параметра a:

$(a^2+4a)x=a+5x+5$.

Решение.

$a^2x+4ax-5x=a+5$

$(a^2+4a-5)x=a+5$

$a^2+4a-5=0$

$D=4^2-4(-5)=16+20=36$

$a_1=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-4+6}{2}=1$

$a_2=\dfrac{-4-\sqrt{36}}{2}=\dfrac{-4-6}{2}=-\dfrac{10}{2}=-5$

При $a=1$, $0\cdot x=6$, $x\in\varnothing$.

При $a=-5$, $0\cdot x=0$, $x\in R$.

При $a\neq1$ и $a\neq-5$, $x=\dfrac{a+5}{a^2+4a-5}=\dfrac{\cancel{a+5}}{(a-1)\cancel{(a+5)}}=\dfrac{1}{a-1}$.

Ответ: При $a=1$, $x\in\varnothing$;

при $a=-5$, $x\in R$;

при $a\neq1$ и $a\neq-5$, $x=\dfrac{1}{a-1}$.

Пример 19. Решить уравнение относительно x в зависимости от параметра a:

$$\left(2a^2-4a\right)x=2a+6x+2.$$

Решение.

$$2a^2x-4ax-6x=2a+2$$

$$a^2x-2ax-3x=a+1$$

$$\left(a^2-2a-3\right)x=a+1$$

$$a^2-2a-3=0$$

$$D=\left(-2\right)^2-4\left(-3\right)=4+12=16$$

$$a_1=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$a_2=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

При $a=3,\ 0\cdot x=4,\ x\in\varnothing$.

При $a=-1,\ 0\cdot x=0,\ x\in R$.

При $a\neq 3$ и $a\neq -1,\ x=\dfrac{a+1}{a^2-2a-3}=\dfrac{\cancel{a+1}}{\left(a-3\right)\cancel{\left(a+1\right)}}=\dfrac{1}{a-3}$.

Ответ: При $a=3,\ x\in\varnothing$;

при $a=-1,\ x\in R$;

при $a\neq 3$ и $a\neq -1,\ x=\dfrac{1}{a-3}$.

Пример 20. Решите уравнение с параметром a:

$$\frac{3x-2}{a^2-2a}+\frac{x-1}{a-2}+\frac{2}{a}=0.$$

Решение.

$$a^2-2a=a\left(a-2\right)\neq 0\Rightarrow a\neq 0 \text{ и } a\neq 2$$

$$3x-2+ax-a+2a-4=0$$

$$3x+ax+a-6=0$$

$$\left(a+3\right)x=6-a$$

$a=-3$	$a\neq -3$
$0\cdot x=9\Rightarrow x\in\varnothing$	$x=\dfrac{6-a}{a+3}$

Ответ: При $\left[\begin{array}{l}a=-3\\a=0\\a=2\end{array}\right.,\ x\in\varnothing$; при $\left\{\begin{array}{l}a\neq -3\\a\neq 0\\a\neq 2\end{array}\right.,\ x=\dfrac{6-a}{a+3}$.

Пример 21. Решить неравенство для каждого значения параметра:

$$x\left(a-1\right)>0.$$

Решение.

Возможны следующие случаи:

1) $a=1,\ x\cdot 0>0,\ x\in\varnothing$

2) $a>1,\ x>0$

3) $a<1,\ x<0$

Ответ: При $a<1,\ x<0$;

при $a=1,\ x\in\varnothing$;

при $a>1,\ x>0$.

Пример 22. Решить неравенство для каждого значения параметра:

$bx-b\geq -3x$.

Решение.

$bx+3x\geq b$

$(b+3)x\geq b$

Возможны следующие случаи:

1) $b=-3,\ x\cdot 0>-3,\ x\in R$

2) $b>-3,\ x\geq \dfrac{b}{b+3}$

3) $b<-3,\ x\leq \dfrac{b}{b+3}$

Ответ: При $b<-3,\ x\leq \dfrac{b}{b+3}$;

при $b=-3,\ x\in R$;

при $b>-3,\ x\geq \dfrac{b}{b+3}$.

Пример 23. Решите линейное неравенство:

$ax+x-3a+1>0$.

Решение.

$(a+1)x>3a-1$

$a=-1,\ 0\cdot x>-4,\ x\in R$

$a>-1$

$x>\dfrac{3a-1}{a+1}$

$a<-1$

$x<\dfrac{3a-1}{a+1}$

Ответ: При $a<-1,\ x<\dfrac{3a-1}{a+1}$;

при $a=-1,\ x\in R$;

при $a>-1,\ x>\dfrac{3a-1}{a+1}$.

Пример 24. Решите линейное неравенство:

$ax+x+1<0$.

Решение.

$(a+1)x<-1$

$a=-1,\ 0\cdot x<-1,\ x\in\varnothing$

$a>-1$

$x < -\dfrac{1}{a+1}$

$a < -1$

$x > -\dfrac{1}{a+1}$

Ответ: При $a < -1$, $x > -\dfrac{1}{a+1}$;

при $a = -1$, $x \in \varnothing$;

при $a > -1$, $x < -\dfrac{1}{a+1}$.

Пример 25. Решите неравенство:

$x - 5 > nx - 1$.

Решение.

$x - nx > 5 - 1$

$(1-n)x > 4$

$n = 1$, $0 \cdot x > 4$, $x \in \varnothing$

$1 - n > 0 \Rightarrow n < 1$, $x > \dfrac{4}{1-n}$

$1 - n < 0 \Rightarrow n > 1$, $x < \dfrac{4}{1-n}$

Ответ: При $n < 1$, $x > \dfrac{4}{1-n}$;

при $n = 1$ — решений нет;

при $n > 1$, $x < \dfrac{4}{1-n}$.

Пример 26. Решите неравенство относительно *x*:

$3(2a - x) < ax + 1$.

Решение.

$6a - 3x < ax + 1$

$-3x - ax < 1 - 6a$

$3x + ax > 6a - 1$

$(a+3)x > 6a - 1$

$a = -3$, $0 \cdot x > -19$, $x \in R$

$a > -3$ $\qquad\qquad$ $a < -3$

$x > \dfrac{6a-1}{a+3}$ $\qquad\qquad$ $x < \dfrac{6a-1}{a+3}$

Ответ: При $a = -3$, $x \in R$;

при $a > -3$, $x > \dfrac{6a-1}{a+3}$;

при $a < -3$, $x < \dfrac{6a-1}{a+3}$.

Пример 27. При каких значениях *a* неравенство $3x - 2 > a - x + 4$ является следствием неравенства $2x + a > 0$?

Решение.

Сначала решим каждое неравенство.

1) $3x-2>a-x+4$

$4x>a+6$

$x>\frac{a+6}{4}$

$x\in\left(\frac{a+6}{4};+\infty\right)$

2) $2x+a>0$

$x>-\frac{a}{2}$

$x\in\left(-\frac{a}{2};+\infty\right)$

Множество решений второго неравенства должно содержаться в множестве решений первого неравенства. Это возможно, если:

$-\frac{a}{2}\geq\frac{a+6}{4}$

$-2a\geq a+6$

$-3a\geq 6$

$a\leq -2$

Ответ: $a\in(-\infty;-2]$.

Пример 28. При каких значениях a неравенство $2x-a>0$ является следствием неравенства $x+2a-3>0$?

Решение.

Сначала решим каждое неравенство.

1) $2x-a>0$

$2x>a$

$x>\frac{a}{2}$

$x\in\left(\frac{a}{2};+\infty\right)$

2) $x+2a-3>0$

$x>3-2a$

$x\in(3-2a;+\infty)$

Множество решений второго неравенства должно содержаться в множестве решений первого неравенства. Это возможно, если:

$3-2a\geq\frac{a}{2}$

$6-4a\geq a$

$-5a\geq -6$

$a\leq\frac{6}{5}$

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

Пример 29. При каких значениях a неравенства $2x+1<x+2a$ и $x-2a-3<2a$ равносильны?

Решение.

Сначала решим каждое неравенство.

$2x+1<x+2a$ $\quad\quad$ $x-2a-3<2a$

$2x-x<2a-1$ $\quad\quad$ $x<4a+3$

$x<2a-1$ $\quad\quad$ $x \in (-\infty; 4a+3)$

$x \in (-\infty; 2a-1)$

У равносильных неравенств множества их решений совпадают.

Найдем a, решив уравнение:

$2a-1=4a+3$

$2a-4a=3+1$

$-2a=4$

$a=-2$

Ответ: $a=-2$

Пример 30. Решите неравенство:

$a(x-2) \ge (a-1)x+x-2$.

Решение.

Раскроем скобки:

$ax-2a \ge ax-x+x-2$

$-2a \ge -2$

$a \le 1,\ x \in R$

$a > 1,\ x \in \varnothing$

Ответ: Если $a \le 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$;

если $a>1$, то решений нет.

Пример 31. При каких значениях a неравенство $x \le 2a+3$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $-3 \le x \le -a-2$?

Решение.

Достаточно решить систему:

$$\begin{cases} 2a+3 \ge -a-2 \\ -a-2 > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a \ge -5 \\ -a > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -\frac{5}{3} \\ a < 1 \end{cases} \quad a \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right)$$

Ответ: $a \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right)$.

Пример 32. При каких значениях a неравенство $2x-a+4<0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $3 \le x \le 5$?

Решение.

$2x<a-4$

$x < \dfrac{a-4}{2}$

$x \in \left(-\infty; \dfrac{a-4}{2}\right)$

А теперь узнаем, при каких значениях a отрезок $[3;5]$ принадлежит промежутку $\left(-\infty; \dfrac{a-4}{2}\right)$. Это произойдет, если:

$\dfrac{a-4}{2} > 5$

$a-4 > 10$

$a > 14$

Ответ: $a \in (14, +\infty)$.

Пример 33. При каких значениях k неравенство $(k-1)x + 2k + 1 > 0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x| \le 3$?

Решение.

Решим сначала неравенство $(k-1)x > -2k - 1$.

Возможны следующие случаи:

1) $k = 1$, тогда $0 \cdot x > -3,\ x \in R$;

2) $k > 1$, тогда $x > \dfrac{2k+1}{1-k}$, $x \in \left(\dfrac{2k+1}{1-k}; +\infty\right)$;

3) $k < 1$, тогда $x < \dfrac{2k+1}{1-k}$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{2k+1}{1-k}\right)$.

При $k = 1$ множество решений данного неравенства включает в себя отрезок $[-3;3]$. Для того чтобы отрезок $[-3;3]$ принадлежал множеству $\left(\dfrac{2k+1}{1-k}; +\infty\right)$, где $k > 1$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$\dfrac{2k+1}{1-k} < -3$.

Решаем это неравенство:

$\dfrac{2k+1}{1-k} + 3 < 0$

$\dfrac{2k+1+3-3k}{1-k} < 0$

$\dfrac{4-k}{1-k} < 0$

$k \in (1;4)$

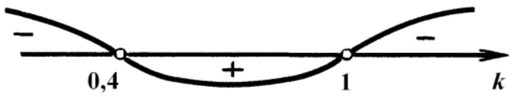
Аналогично найдем, при каких значениях $k<1$ отрезок $[-3;3]$ принадлежит множеству $\left(-\infty;\dfrac{2k+1}{1-k}\right)$.

$$\frac{2k+1}{1-k}>3$$

$$\frac{2k+1}{1-k}-3>0$$

$$\frac{2k+1-3+3k}{1-k}>0$$

$$\frac{5k-2}{1-k}>0$$



$k\in(0,4;\ 1)$

Ответ: $k\in(0,4;\ 4)$.

Пример 34. Найдите все значения *m*, при которых неравенство:

$(x-3m)(x-m-3)<0$,

выполняется при всех значениях *x*, таких, что $1\le x\le 3$.

Решение.

Решением заданного неравенства является один из промежутков $(3m;m+3)$ или $(m+3;3m)$. Причем по условию каждый из этих промежутков должен содержать отрезок $[1;3]$. Поэтому искомые значения параметра — это решения следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3m<1\\3<m+3\end{cases}\\ \begin{cases}m+3<1\\3<3m\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<\dfrac{1}{3}\\m>0\end{cases}\\ \begin{cases}m<-2\\m>1\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система решений не имеет, из первой системы получаем: $0<m<\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $0<m<\dfrac{1}{3}$.

Пример 35. Решите неравенство:

$$\frac{ax+1}{3}-\frac{x-4a}{2}\ge\frac{a^2}{6}.$$

Решение.

$2ax+2-3x+12a-a^2\ge 0$

$(2a-3)x\ge a^2-12a-2$

1) $a=\dfrac{3}{2}$, $0\cdot x\ge -71$, $x\in R$.

2) $a>\dfrac{3}{2}$, $x\ge \dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}$

3) $a<\dfrac{3}{2}$, $x\le \dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}$

Ответ: При $a<\dfrac{3}{2}$, $x\le \dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}$;

при $a=\dfrac{3}{2}$, $x\in R$;

при $a>\dfrac{3}{2}$, $x\ge \dfrac{a^2-12a-2}{2a-3}$.

Пример 36. Решите неравенство:

$$\frac{a^2x+1}{2}-\frac{a^2x+3}{3}<\frac{a+9x}{6}.$$

Решение.

$$3a^2x+3-2a^2x-6-a-9x<0$$
$$a^2x-a-9x-3<0$$
$$\left(a^2-9\right)x<a+3$$

$a=3$

$0\cdot x<6,\ x\in R$

$a=-3$

$0\cdot x<0,\ x\in\varnothing$

$|a|>3$

$x<\dfrac{1}{a-3}$

$|a|<3$

$x>\dfrac{1}{a-3}$

Ответ: При $|a|>3$, $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{a-3}\right)$;

при $|a|<3$, $x\in\left(\dfrac{1}{a-3};+\infty\right)$;

при $a=-3$, $x\in\varnothing$;

при $a=3$, $x\in R$.

Пример 37. Решите неравенство:

$$\frac{3x+1}{a^2-1}-\frac{2x-1}{a-1}\le\frac{x-1}{a+1}.$$

Решение.

$$\frac{3x+1-2ax-2x+a+\cancel{1}-ax+x+a\cancel{-1}}{a^2-1}\le 0$$
$$\frac{-3ax+2x+1+2a}{a^2-1}\le 0$$
$$\frac{(3a-2)x-1-2a}{a^2-1}\ge 0$$

$$\frac{x-\frac{2a+1}{3a-2}}{\frac{a^2-1}{3a-2}}\ge 0$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\ge \frac{2a+1}{3a-2}\\ \frac{a^2-1}{3a-2}>0\end{cases}\\ &\begin{cases}x\le \frac{2a+1}{3a-2}\\ \frac{a^2-1}{3a-2}<0\end{cases}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\in\left[\frac{2a+1}{3a-2};+\infty\right)\\ a\in\left(-1;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)\end{cases}\\ &\begin{cases}x\in\left(-\infty;\frac{2a+1}{3a-2}\right]\\ a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};1\right)\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Ответ: При $a\in\left(-1;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$, $x\in\left[\frac{2a+1}{3a-2};+\infty\right)$;

при $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};1\right)$, $x\in\left(-\infty;\frac{2a+1}{3a-2}\right]$;

при $a=\frac{2}{3}$, $x\in R$.

Пример 38. Решите неравенство:

$$\frac{2x-m}{(m-2)(x+3)}-\frac{m}{m-2}<\frac{3}{x+3}.$$

Решение.

При $m\ne 2$ и $x\ne 3$ неравенство не имеет смысла.

Приведем неравенство к общему знаменателю:

$$\frac{2x-m}{(m-2)(x+3)}-\frac{m}{m-2}-\frac{3}{x+3}<0$$

$$\frac{2x-m-m(x+3)-3(m-2)}{(m-2)(x+3)}<0$$

$$\frac{2x-m-mx-3m-3m+6}{(m-2)(x+3)}<0$$

$$\frac{-(m-2)x-7m+6}{(m-2)(x+3)}<0$$

$$\frac{x(m-2)-(6-7m)}{(m-2)(x+3)}>0$$

$$\frac{x-\frac{6-7m}{m-2}}{x+3}>0$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-\dfrac{6-7m}{m-2}>0\\ x+3>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-\dfrac{6-7m}{m-2}<0\\ x+3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>\dfrac{6-7m}{m-2}\\ x>-3\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x<\dfrac{6-7m}{m-2}\\ x<-3\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решим (1). Пересечение множеств системы возможно в двух случаях:

а) точка $\dfrac{6-7m}{m-2}$ располагается правее точки -3, и пересечение $x>\dfrac{6-7m}{m-2}$ (рис. 1).

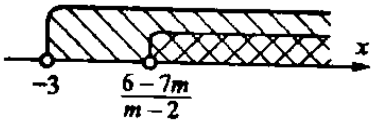


Рис. 1

Покажем, при каких m это возможно, для чего решим неравенство:

$$\frac{6-7m}{m-2}\geq -3$$

$$3+\frac{6-7m}{m-2}\geq 0$$

$$\frac{-4m}{m-2}\geq 0$$

Неравенству удовлетворяют $m\in[0;2)$, т.е. при $m\in[0;2)$ $x>\dfrac{6-7m}{m-2}$.

б) точка $\dfrac{6-7m}{m-2}$ располагается левее точки -3, и пересечение $x>-3$ при $\dfrac{6-7m}{m-2}\leq -3$ (рис. 2) или при $\left[\begin{array}{l} m\leq 0\\ m>2\end{array}\right.$, т.е. $\forall m\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$ $x>-3$.

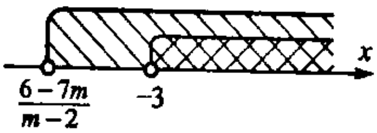


Рис. 2

Решим систему (2). Как и выше, имеем два случая:

а) $x<-3$ при $\dfrac{6-7m}{m-2}\geq -3$ (рис. 3), т.е. при $m\in[0;2)$;

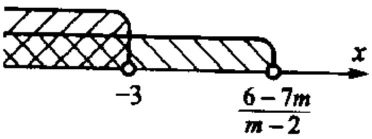


Рис. 3

б) $x<\dfrac{6-7m}{m-2}$ при $\dfrac{6-7m}{m-2}\leq -3$ (рис. 4), т.е. при $m\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$.

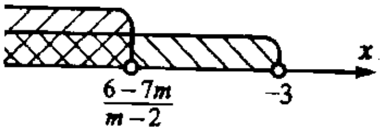


Рис. 4

Ответ: при $m \in (-\infty;0] \cup (2;+\infty)$, $x \in \left(-\infty;\dfrac{6-7m}{m-2}\right) \cup (-3;+\infty)$;

при $m \in [0;2)$, $x \in (-\infty;-3) \cup \left(\dfrac{6-7m}{m-2};+\infty\right)$;

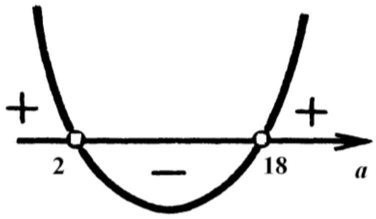
при $m = 2$, $x \in \varnothing$.

Пример 39. Решите уравнение:
$x^2 - 2x - a = 0$.
Решение.
$D = 1 + a$
Рассмотрим три случая:
1) $D > 0$
$1 + a > 0$
$a > -1$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$
2) $D = 0$
$1 + a = 0$
$a = -1$
$x = 1$
3) $D < 0$
$1 + a < 0$
$a < -1$
При $a < -1$, уравнение не имеет действительных корней.
Ответ: При $a \in (-1;+\infty)$, $x = 1 \pm \sqrt{1+a}$;
при $a = -1$, $x = 1$;
при $a \in (-\infty;-1)$, $x \in \varnothing$.

Пример 40. Решите уравнение:
$x^2 + 2x - 8 - a(x-4) = 0$.
Решение.
$x^2 + 2x - 8 - ax + 4a = 0$
$x^2 + (2-a)x + 4a - 8 = 0$
$D = (2-a)^2 - 4(4a-8) = 4 - 4a + a^2 - 16a + 32 = a^2 - 20a + 36$
Рассмотрим три случая:
1) $D > 0$
$a^2 - 20a + 36 > 0$
$a^2 - 20a + 36 = 0$
$D = (20)^2 - 4 \cdot 36 = 400 - 144 = 256 = 16^2$

$$a_1 = \frac{20+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$a_2 = \frac{20-16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



$a \in (-\infty; 2) \cup (18; +\infty)$

$$x_{1,2} = \frac{a-2 \pm \sqrt{a^2-20a+36}}{2} = \frac{a-2 \pm \sqrt{(a-2)(a-18)}}{2}$$

2) $D = 0$

$a^2 - 20a + 36 = 0$

$a_1 = 18$

$a_2 = 2$

$$x = \frac{a-2}{2}$$

Подставим $a = 2$ и $a = 18$:

$a = 2$	$a = 18$
$x = 0$	$x = \frac{18-2}{2} = \frac{16}{2} = 8$

3) $D < 0$

$a^2 - 20a + 36 < 0$

$a \in (2; 18) \Rightarrow x \in \varnothing$

Ответ: При $a = 2$, $x = 0$;

при $a = 18$, $x = 8$;

при $a \in (-\infty; 2) \cup (18; +\infty)$, $x = \frac{a-2 \pm \sqrt{(a-2)(a-18)}}{2}$;

при $a \in (2; 18)$, $x \in \varnothing$.

Пример 41. Решите уравнение:

$bx^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение.

Если $b = 0$, то уравнение станет линейным. Этот случай рассматривают отдельно.

1) Пусть $b = 0$. Тогда уравнение примет вид $-2x + 1 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$.

2) Пусть $b \neq 0$.Тогда уравнение становиться уравнением второй степени.

$D = 1 - b$

Рассмотрим три случая:

2.1. $D > 0$

$1-b>0$

$b<1$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-b}}{b}$

2.2. $D=0$

$1-b=0$

$b=1$

$x=1$

2.3. $D<0$

$1-b<0$

$b>1$

При $b>1$, уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: При $b=0$, $x=\dfrac{1}{2}$

при $b=1$, $x=1$;

при $b\in(-\infty;0)\cup(0;1)$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-b}}{b}$;

при $b\in(1;+\infty)$, $x\in\varnothing$.

Пример 42. Решите уравнение:

$(a+1)x^2-x+(1-a)=0$.

Решение.

1) При $a=-1$ уравнение является линейным и решается следующим образом:

$-x+(1+1)=0$

$-x=-2$

$x=2$

2) Уравнение является квадратным при $a\neq-1$.

$D=1^2-4(a+1)(1-a)=1-4(1-a^2)=1-4+4a^2=4a^2-3$

2.1. $D>0$

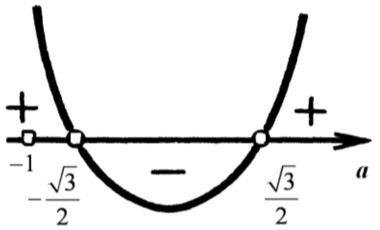
$4a^2-3>0$

$4a^2-3=0$

$4a^2=3$

$a^2=\dfrac{3}{4}$

$a_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$a \in (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2-3}}{2a+2}$

2.2. $D = 0$

$4a^2 - 3 = 0$

$a^2 = \frac{3}{4}$

$a_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{1}{2a+2}$

Подставим $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

2.3. $D < 0$

$4a^2 - 3 < 0$

$a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x \in \varnothing$

Ответ: При $a = -1$, $x = 2$;

при $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

при $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$;

при $a \in (-\infty;-1) \cup \left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2-3}}{2a+2}$;

при $a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x \in \varnothing$.

Пример 43. Решите уравнение:

$(a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0$.

Решение.

Если $a = -1$, то уравнение станет линейным.

1) Пусть $a = -1$. Тогда уравнение примет вид $2x + 2 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = -1$.

2) Пусть $a \neq -1$.Тогда уравнение становиться уравнением второй степени.

$D = a^2 - 2a + 1 + 8a^2 + 8a = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$

2.1. $D>0$

$(3a+1)^2>0$

$a>-\frac{1}{3}$

$x_1=\frac{a\cancel{-1}+3a+\cancel{1}}{2a+2}=\frac{4a}{2(a+1)}=\frac{2a}{a+1}$

$x_2=\frac{a-1-3a-1}{2a+2}=\frac{-2a-2}{2a+2}=\frac{-a-1}{a+1}=\frac{-\cancel{(a+1)}}{\cancel{a+1}}=-1$

2.2. $D=0$

$(3a+1)^2=0$

$a=-\frac{1}{3}$

$x=\frac{a-1}{2(a+1)}$

Подставляем $a=-\frac{1}{3}$ в $x=\frac{a-1}{2(a+1)}$, отсюда находим, что $x=-1$.

2.3. $D<0$

$(3a+1)^2<0$

$a<-\frac{1}{3}$

Учитывая, что $a\neq -1$ получаем $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$, в этом случае $x\in\varnothing$.

Ответ: При $a=-1$, $x=-1$;

при $a=-\frac{1}{3}$, $x=-1$;

при $a>-\frac{1}{3}$, $x_1=\frac{2a}{a+1}$ и $x_2=-1$;

при $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$, $x\in\varnothing$.

Пример 44. Решите уравнение:

$\frac{2x}{x-b}+\frac{1}{x+4}=\frac{7x+b}{x^2+x(4-b)-4b}$. (1)

Решение.

Допустимыми значениями x и b будут значения, при которых общий знаменатель не равен нулю:

$x^2+x(4-b)-4b=x^2+4x-bx-4b=(x+4)x-b(x+4)=(x+4)(x-b)$

$x\neq -4$

$x\neq b$

Освободившись от знаменателя, получаем уравнение (2):

$2x^2+8x+x-b=7x+b$

$2x^2+9x-b-7x-b=0$

$2x^2+2x-2b=0$

$x^2+x-b=0$ (2)

$D=1+4b$

Рассмотрим три случая:

1) $D>0$

$1+4b>0$

$4b>-1$

$b>-\frac{1}{4}$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4b}}{2}$

2) $D=0$

$1+4b=0$

$b=-\frac{1}{4}$

$x=-\frac{1}{2}$

3) $D<0$

$1+4b<0$

$b<-\frac{1}{4}$, то действительных решений нет $\Rightarrow$ $x\in\varnothing$

Найдем b, при которых (1) и (2) не равносильны или (1) не имеет числового смысла. Подставив в (2) $x=b$ и $x=-4$.

1) Вместо x в уравнение (2) подставим b:

$b^2+b-b=0$

$b^2=0$

$b=0$

А теперь в это же уравнение вместо b подставим 0:

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x_1=0$ — не подходит, т.к. по условию $x\neq b$.

$x_2=-1$

Следовательно, для данного уравнения допустимо только $x=-1$.

2) Пусть теперь $x=-4$:

$16-4-b=0$

$12-b=0$

$b=12$

Решаем уравнение:

$x^2+x-12=0$

$D=1+48=49$

$x_1=\frac{-1+7}{2}=3$

$x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4$ — не подходит, т.к. по условию $x \neq -4$.

Следовательно, при $b = 12$ корнем данного уравнения будет $x = 3$.

Ответ:

1) Если $b \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0;12) \cup (12;+\infty)$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$;
2) Если $b \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$, то $x \in \varnothing$;
3) Если $b = -\frac{1}{4}$, то $x = -\frac{1}{2}$;
4) Если $b = 0$, то $x = -1$;
5) Если $b = 12$, то $x = 3$.

Пример 45. Решите уравнение:

$$\frac{x}{m+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3m-4}{(m+1)(x-2)}. \qquad (1)$$

Решение.

Допустимыми значениями x и m будут значения, при которых общий знаменатель не равен нулю:

$m \neq -1$

$x \neq 2$

Освободившись от знаменателя, получаем уравнение (2):

$x^2 \cancel{-2x} + 2mx + \cancel{2x} = 3m - 4$

$x^2 + 2mx - 3m + 4 = 0 \qquad (2)$

$D = m^2 - (4-3m) = m^2 - 4 + 3m = m^2 + 3m - 4$

Рассмотрим три случая:

1) $D = 0$

$m^2 + 3m - 4 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$m_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$m_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$

Отсюда, $x = -m$.

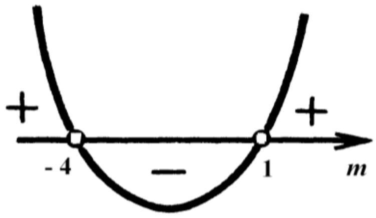
Следовательно, если $m = 1$, то $x = -1$, а если $m = -4$, то $x = 4$.

2) $D < 0$

$m^2 + 3m - 4 < 0$

$m_1 = 1$

$m_2 = -4$



$m \in (-4;1)$, то действительных решений нет $\Rightarrow$ $x \in \varnothing$

3) $D > 0$

$m^2 + 3m - 4 > 0$

$m \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$

$x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + 3m - 4}$

Найдем *m*, при которых (1) и (2) не равносильны или (1) не имеет числового смысла. Подставив в (2) $x = 2$.

$4 + 4m - 3m + 4 = 0$

$m = -8$

Решаем уравнение (2) при $m = -8$:

$x^2 - 16x + 24 + 4 = 0$

$x^2 - 16x + 28 = 0$

$D = 256 - 112 = 144 = 12^2$

$x_1 = \dfrac{16+12}{2} = 14$

$x_2 = \dfrac{16-12}{2} = 2$ — не подходит, т.к. по условию $x \neq 2$

Следовательно, при $m = -8$ корнем данного уравнения будет $x = 14$.

Ответ:

1) Если $m \in (-\infty;-8) \cup (-8;-4) \cup (1;+\infty)$, то $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + 3m - 4}$;
2) Если $m = -8$, то $x = 14$;
3) Если $m = -4$, то $x = 4$;
4) Если $m \in (-4;1)$, то $x \in \varnothing$;
5) Если $m = 1$, то $x = -1$.

Пример 46. Решите уравнение:

$$\frac{x^2+1}{n^2x-2n} + \frac{1}{nx-2} = \frac{x}{n}.$$

Решение.

При $n(nx-2) = 0$ уравнение не имеет смысла, *n* должно удовлетворять следующим условиям:

$n \neq 0$ и $nx \neq 2 \Rightarrow n \neq \dfrac{2}{x}$.

Освободившись от знаменателя, получаем следующее уравнение:

$x^2 + 1 + n - nx^2 + 2x = 0$

$x^2 - nx^2 + n + 2x + 1 = 0$

$\left(1-n\right)x^2+2x+n+1=0$

Если $1-n=0 \Rightarrow n=1$, то уравнение станет линейным.

1) Пусть $n=1$. Тогда уравнение примет вид $2x+2=0$. Оно имеет единственный корень $x=-1$.

2) Пусть $n\neq 1$.Тогда уравнение становиться уравнением второй степени.

$D=2^2-4\left(1-n\right)\left(n+1\right)=4-4\left(1-n^2\right)=4-4+4n^2=4n^2=\left(2n\right)^2$

$x_1=\dfrac{-2+2n}{2-2n}=\dfrac{-\cancel{\left(2-2n\right)}}{\cancel{2-2n}}=-1$

$x_2=\dfrac{-2-2n}{2-2n}=\dfrac{\cancel{-2}\left(n+1\right)}{\cancel{-2}\left(n-1\right)}=\dfrac{n+1}{n-1}$

Подставив $n=0$ найдем x, при которых уравнение не имеет числового смысла.

$x^2+2x+1=0$

$D=4-4=0$

$x=\dfrac{-2}{2}=-1$

Следовательно, $x_1=-1$ — не является корнем уравнения.

Ответ: При $n\neq 1$ и $n\neq 0$, $x=\dfrac{n+1}{n-1}$;

при $n=1$, $x=-1$;

при $n=0$, $x\in\varnothing$.

Пример 47. Определить число a так, чтобы один из корней уравнения $4x^2-15x+4a^3=0$ был квадратом другого.

Решение.

$4x^2-15x+4a^3=0$

$x_2=x_1^2$ (по условию)

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{15}{4} \\ x_1\cdot x_2=a^3 \end{cases}$$

Подставляем x_1^2 вместо x_2:

$$\begin{cases} x_1+x_1^2=\dfrac{15}{4} \\ x_1\cdot x_1^2=a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+x_1-\dfrac{15}{4}=0 \\ x_1^3=a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=a \\ a^2+a-\dfrac{15}{4}=0 \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$4a^2+4a-15=0$

$D=16+16\cdot 15=16^2$

$a_1=\dfrac{-4+16}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

$a_2=\dfrac{-4-16}{8}=\dfrac{-20}{8}=-\dfrac{5}{2}$

Ответ: $a=-\frac{5}{2}$; $a=\frac{3}{2}$.

Пример 48. При каком значении m выражение $x^2+m(m-1)x+36$ есть полный квадрат?

Решение.

Формула полного квадрата:

$a^2 \pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

Отсюда, в уравнении $x^2+m(m-1)x+36$:

$a=x$

$b=6$

$\pm 2ab=m(m-1)x$

$\pm 12\cancel{x}=m(m-1)\cancel{x}$

$$\left[\begin{array}{l} m^2-m-12=0 \\ m^2-m+12=0 \Rightarrow D<0 \end{array}\right.$$

Решаем уравнение:

$m^2-m-12=0$

$D=1+48=49=7^2$

$m_1=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$

$m_2=\frac{1-7}{2}=-\frac{6}{2}=-3$

Ответ: $m=-3$; $m=4$.

Пример 49. Какими должны быть p и q, чтобы уравнение $x^2+px+q=0$ имело корнями p и q?

Решение.

По условию:

$x_1=p$

$x_2=q$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$$

Подставим значения x_1 и x_2:

$$\begin{cases} p+q=-p \\ p\cdot q=q \end{cases} \quad \begin{cases} q=-2p \\ q(p-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q=-2p \\ q=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q=-2p \\ p=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

Ответ: $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.

Пример 50. При каком действительном значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ будет наименьшей?

Решение.

1) Чтобы уравнение имело корни $D\ge 0$:

$$D=a^2-4a+8=(a-2)^2+4>0$$

Следовательно, при всех a уравнение имеет 2 корня.

2) По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1\cdot x_2=a-2 \end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2=\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)-2x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$$

Подставляем,

$(-a)^2-2(a-2)=a^2-2a+4$ — квадратный трехчлен $\Rightarrow$ наименьшее значение в вершине, т.е. при $a=-\dfrac{(-2)}{2\cdot 1}=1$

Ответ: $a=1$.

Пример 51. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов корней?

Решение.

$$x^2-2a(x-1)-1=0$$

$$x^2-2ax+2a-1=0$$

По условию: $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2$.

$$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2 \Rightarrow x_1+x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2a \\ x_1\cdot x_2=2a-1 \end{cases}$$

Подставляем,

$$2a=(2a)^2-2(2a-1)$$

$$2a=4a^2-4a+2$$

$$4a^2-6a+2=0$$

$$2a^2-3a+1=0$$

$$D=9-8=1$$

$$a_1=\frac{3+1}{4}=1$$

$$a_2=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Ответ: $a=\dfrac{1}{2};\, a=1$.

Пример 52. При каком значении p корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ противоположны по знаку? Найти эти корни.

Решение.

$5x^2-4(p+3)x+4-p^2=0$

$x_2=-x_1$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{4}{5}(p+3) \\ x_1\cdot x_2=\frac{4-p^2}{5} \end{cases}$$

Подставляем $(-x_1)$, вместо x_2:

$$\begin{cases} 0=\frac{4}{5}(p+3) \\ -x_1^2=\frac{4-p^2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ x_1^2=-\frac{4-p^2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ x_1^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ x_1=\pm 1 \end{cases}$$

Ответ: При $p=-3$, $x_1=1$ $x_2=-1$.

Пример 53. Определить все значения *a*, при которых уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение.

Пусть общим корнем данных уравнений является $x=\beta$.

Тогда,

$$\begin{cases} \beta^2+a\beta+1=0 \\ \beta^2+\beta+a=0 \end{cases}$$

Отсюда после вычитания получаем:

$a\beta-\beta+1-a=0$

$\beta(a-1)=a-1$

$\beta=1$ при $a\neq 1$

Если $\beta=1$, то: $1+a+1=0 \Rightarrow a=-2$.

Подставим $a=-2$ в каждое уравнение:

1) $x^2-2x+1=0$

$D=4-4=0$

$x=\frac{2}{2}=1$

2) $x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$x_1=\frac{-1+3}{2}=1$

$x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

Отсюда видно, что уравнения имеют общий корень $x=1$.

Ответ: $a=-2$.

Пример 54. Найти все значения *a*, при которых уравнение имеет единственное решение:

$2x+(1-4a)\sqrt{x}+2a^2+a-1=0$. (1)

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x}=t\geq 0$, тогда уравнение (1) примет вид:

$2t^2+(1-4a)t+2a^2+a-1=0$. (2)

Для нахождения корней уравнения (1) необходимо решить уравнение (2) на $t\geq 0$. При этом, в зависимости от значения *а*, возможны случаи, каждый из которых проанализируем в отдельности:

1. Уравнение (2) без условия $t\geq 0$ имеет корни разного знака, а при $t\geq 0$ имеет один корень $t_2>0$. Для нахождения значений *а*, удовлетворяющим этим условиям, надо применить правило отыскания разнозначных корней, т.е.:

$$x_1x_2=2a^2+a-1<0$$

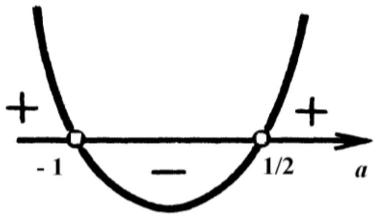
$$2a^2+a-1<0$$

$$2a^2+a-1=0$$

$$D=1+8=9$$

$$a_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a_2=\frac{-1-3}{4}=-1$$



$$a\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$$

2. Уравнение (2) на $t\geq 0$ имеет два совпадающих корня, т.е. одно решение. Это возможно в том случае, когда $D=0$, т.е.:

$$D=(1-4a)^2-8\left(2a^2+a-1\right)=1-8a+\cancel{16a^2}\cancel{-16a^2}-8a+8=-16a+9$$

$$-16a+9=0$$

$$a=\frac{9}{16}$$

Проверим знаки корней:

$$t_1=t_2=\frac{-(1-4a)}{4}=\frac{-\left(1-4\cdot\frac{9}{16}\right)}{4}=\frac{-\left(1-\frac{9}{4}\right)}{4}=\frac{5}{16}>0$$

3. Один корень равен нулю, а другой отрицательный. Это возможно, если свободный член равен нулю, т.е.:

$$2a^2+a-1=0$$

$$a_1=\frac{1}{2}$$

$$a_2=-1$$

Так как это условие необходимое, но недостаточное (необходимость состоит в том, что обязательно один корень будет равен нулю), то требуется проверка знака другого корня.

При $a=-1$

$2t^2+5t=0$

$t(2t+5)=0$

$t_1=0$

$t_2=-\frac{5}{2}$

При $a=\frac{1}{2}$

$2t^2-t=0$

$t(2t-1)=0$

$t_1=0$

$t_2=\frac{1}{2}$

При $a=\frac{1}{2}$, один корень равен нулю, а второй больше нуля, этот случай нам не подходит.

Чтобы найти все значения *a*, при которых уравнение имеет единственное решение, надо совокупно рассмотреть случаи 1, 2 и 3.

Ответ: $a\in\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{9}{16}\right\}$.

Пример 55. Найти все значения *a*, при которых уравнение имеет два корня:

$(a+1)x+8\sqrt{x}+a-5=0$. (1)

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x}=t\geq 0$, тогда уравнение (1) примет вид:

$(a+1)t^2+8t+a-5=0$. (2)

Для нахождения корней уравнения (1) необходимо решить уравнение (2) на $t\geq 0$. При этом, в зависимости от значения *a*, возможны случаи, каждый из которых проанализируем в отдельности, учитывая, что $a\neq -1$:

1. Один корень равен нулю, а другой положительный. Это возможно, если свободный член равен нулю, т.е.:

$\frac{a-5}{a+1}=0$

$a_1=5$

$a_2=-1$ — не подходит, т.к. $a\neq -1$.

Так как это условие необходимое, но недостаточное (необходимость состоит в том, что обязательно один корень будет равен нулю), то требуется проверка знака другого корня.

При $a=5$

$6t^2+8t=0$

$t(6t+8)=0$

$t_1=0$

$t_2 = -\frac{8}{6}$

Следовательно, при $a = 5$, один корень равен нулю, а второй меньше нуля, этот случай нам не подходит.

2. Оба корня уравнения положительны. Это возможно тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_1 + t_2 = \frac{-8}{a+1} > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{a-5}{a+1} > 0 \end{cases}$$

Решаем каждое неравенство отдельно:

а) $D = 64 - 4(a+1)(a-5) = 64 - 4(a^2 - 4a - 5) = 64 - 4a^2 + 16a + 20 = -4a^2 + 16a + 84$

$-4a^2 + 16a + 84 > 0$

$4a^2 - 16a - 84 < 0$

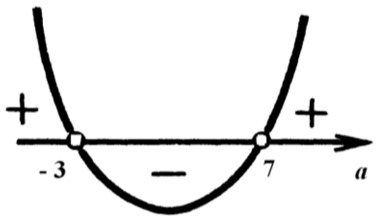
$a^2 - 4a - 21 < 0$

$a^2 - 4a - 21 = 0$

$D = 16 + 84 = 100$

$a_1 = \frac{4+10}{2} = 7$

$a_2 = \frac{4-10}{2} = -3$



$a \in (-3; 7)$

б) $\frac{-8}{a+1} > 0$

$\frac{8}{a+1} < 0$

$a < -1$

$a \in (-\infty; -1)$

в) $\frac{a-5}{a+1} > 0$

$a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

Теперь объединяем полученные нами значения:

$$\begin{cases} a \in (-3;7) \\ a \in (-\infty;-1) \\ a \in (-\infty;-1) \cup (5;+\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-3;-1).$$

Ответ: $a \in (-3;-1)$.

Пример 56. Дано уравнение:

$(3+a)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$.

При каких значениях параметра *a*:

а) оно имеет два различных действительных корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет действительных корней;

г) один из корней равен нулю;

д) оба корня равны нулю?

Решение.

а) $\begin{cases} 3+a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3 \\ a^2 - (3+a)(a+2) > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a \neq -3 \\ \cancel{a^2} - 3a - 6 - \cancel{a^2} - 2a > 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} a \neq -3 \\ 5a + 6 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3 \\ a < -1,2 \end{cases}$

Ответ: $a \in (-\infty;-3) \cup (-3;-1,2)$.

б) При $a = -3$ уравнение $6x - 1 = 0$ имеет единственное решение. Пусть $a \neq -3$. Рассмотрим уравнение второй степени.

$\begin{cases} a \neq -3 \\ D = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3 \\ 5a + 6 = 0 \end{cases}$

$a = -1,2$

Ответ: $a = -3$ или $a = -1,2$.

в) $\begin{cases} a \neq -3 \\ D < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3 \\ -5a - 6 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3 \\ a > -1,2 \end{cases}$

$a > -1,2$

Ответ: $a \in (-1,2;+\infty)$.

г) Уравнение должно иметь вид $Ax^2 + Bx = 0$, где $A \neq 0$, $B \neq 0$.

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ a \neq 0 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

Ответ: $a = -2$.

д) Уравнение должно иметь вид $Ax^2 = 0$, где $A \neq 0$.

$\begin{cases} 2a = 0 \\ 3 + a \neq 0 \\ a + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0 \\ a \neq -3 \\ a = -2 \end{cases}$

Система не имеет решений.

Ответ: Таких значений параметра нет.

Пример 57. При каких значениях параметра a уравнения

$x^2+(a+4)x+a^2-16=0$ (1) и

$x^2+2(a-8)x+a-6=0$ (2) равносильны?

Решение.

I. Рассмотрим сначала уравнение (1):

$$x^2+(a+4)x+a^2-16=0$$

$$D=(a+4)^2-4a^2+64=a^2+8a+16-4a^2+64=-3a^2+8a+80$$

1) $D=0$

$$-3a^2+8a+80=0$$

$$3a^2-8a-80=0$$

$$D=64+960=1024=32^2$$

$$a_1=\frac{8+32}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$$

$$a_2=\frac{8-32}{6}=\frac{-24}{6}=-4$$

$$x=\frac{-a-4}{2}$$

$$x_1=\left(-\frac{20}{3}-4\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{32}{6}=-\frac{16}{3}$$

$$x_2=\frac{4-4}{2}=0$$

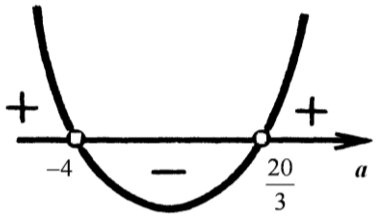
2) $D>0$

$$-3a^2+8a+80>0$$

$$3a^2-8a-80<0$$

$$a_1=\frac{20}{3}$$

$$a_2=-4$$



$$a\in\left(-4;\frac{20}{3}\right)$$

$$x_{1,2}=\frac{-(a+4)\pm\sqrt{-3a^2+8a+80}}{2}$$

3) $D<0$

$$-3a^2+8a+80<0$$

$$3a^2-8a-80>0$$

$a \in (-\infty;-4) \cup \left(\frac{20}{3};+\infty\right) \Rightarrow x \in \varnothing$

II. Теперь рассмотрим уравнение (2):

$x^2 + 2(a-8)x + a - 6 = 0$

$D = (a-8)^2 - a + 6 = a^2 - 16a + 64 - a + 6 = a^2 - 17a + 70$

1) $D = 0$

$a^2 - 17a + 70 = 0$

$D = 289 - 280 = 9$

$a_1 = \frac{17+3}{2} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow x_1 = -a + 8 = -10 + 8 = -2$

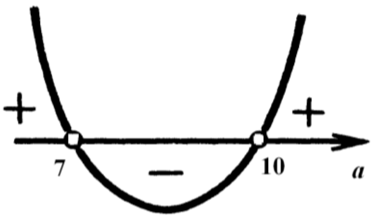
$a_2 = \frac{17-3}{2} = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow x_2 = -a + 8 = -7 + 8 = 1$

2) $D > 0$

$a^2 - 17a + 70 > 0$

$a_1 = 10$

$a_2 = 7$



$a \in (-\infty;7) \cup (10;+\infty)$

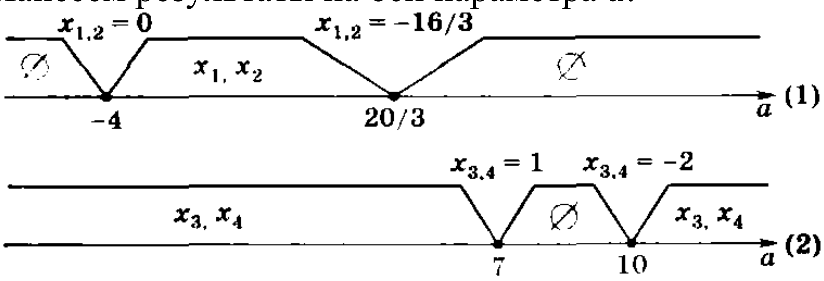
$x_{1,2} = -a + 8 \pm \sqrt{a^2 - 17a + 70}$

3) $D < 0$

$a^2 - 17a + 70 < 0$

$a \in (7;10) \Rightarrow x \in \varnothing$

Нанесем результаты на оси параметра a:



Анализ рисунка показывает, что при $a \in (7;10)$ уравнения равносильны, так как оба не имеют корней.

Ответ: $a \in (7;10)$.

Пример 58. Сколько корней больше -1 в зависимости от a имеет уравнение $x^2 + (2a+6)x + 4a + 12 = 0$?

Решение.

Рассмотрим условие одного корня на $x > -1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0\\ x_{\text{в}}>-1\end{cases}\\ f(-1)<0\\ f(-1)=0\\ x_1<-1\\ x_2=-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}D=(a+3)^2-4a-12=0\\ x_{\text{в}}=-(a+3)>-1\end{cases} & (1)\\ f(-1)=1-2a-6+4a+12<0 & (2)\\ f(-1)=2a+7=0 & (3)\end{array}\right.$$

Решим (1):

$D=a^2+6a+9-4a-12=a^2+2a-3$

$a^2+2a-3=0$

$a_1=-3$

$a_2=1$

При $a=-3$ $x_{\text{в}}=0>-1$;

при $a=1$ $x_{\text{в}}=-2<-1$.

Следовательно, при $a=-3$ одно решение.

Решим (2):

$f(-1)=2a+7<0$

$a<-\dfrac{7}{2}$ — одно решение.

Решим (3):

$2a+7=0$

$a=-\dfrac{7}{2}$

$x_1+x_2=-2a-6$

$x_1=-1$

Тогда при $a=-\dfrac{7}{2}$ $x_2=1+1=2$, т.е. одно решение.

Уравнение имеет одно решение $\forall a\in\left(-\infty;-\dfrac{7}{2}\right)\cup\{-3\}$.

Рассмотрим условие двух корней на $x>-1$:

$$\begin{cases}D>0\\ -\dfrac{p}{2}=-(a+3)>-1\\ f(-1)=2a+7>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-3\\ a>1\end{array}\right.\\ a<-2\\ a>-\dfrac{7}{2}\end{cases} \Rightarrow a\in\left(-\dfrac{7}{2};-3\right).$$

Ответ: $\forall a\in\left(-\infty;-\dfrac{7}{2}\right]\cup\{-3\}$ — один корень;

$\forall a\in\left(-\dfrac{7}{2};-3\right)$ — два корня;

при других a — корней нет.

Пример 59. Решите неравенство:
$ax^2 > a$.
Решение.
$ax^2 - a > 0$
$a(x-1)(x+1) > 0$
Рассмотрим три случая:
1) $a = 0$
Неравенство примет вид $0 \cdot x > 0$. Решений нет.
2) $a > 0$
Разделим обе части неравенства на a (знак неравенства при этом сохраняется):
$(x-1)(x+1) > 0$.

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
3) $a < 0$
Разделим обе части неравенства на a, поменяв при этом знак «>» на «<»:
$(x-1)(x+1) < 0$.
Откуда $x \in (-1; 1)$.
Ответ: При $a = 0$, $x \in \varnothing$;
при $a > 0$, $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
при $a < 0$, $x \in (-1; 1)$.

Пример 60. Решите неравенство:
$x^2 - 4a^2 \geq 0$.
Решение.
$(x-2a)(x+2a) \geq 0$
Сравним $-2a$ и $2a$.
1) Пусть $-2a = 2a$, т.е. $a = 0$.
Неравенство примет вид $x^2 \geq 0$, откуда $x \in R$.
2) Пусть $-2a < 2a$, $a > 0$.

$x \in (-\infty; -2a] \cup [2a; +\infty)$
3) Пусть $-2a > 2a$, $a < 0$.

$x \in (-\infty; 2a] \cup [-2a; +\infty)$

Ответ: При $a = 0$, $x \in R$;

при $a > 0$, $x \in (-\infty; -2a] \cup [2a; +\infty)$;

при $a < 0$, $x \in (-\infty; 2a] \cup [-2a; +\infty)$.

Пример 61. Для всех *a* решите неравенство:

$x^2 + ax + 1 > 0$.

Решение.

$D = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $D = 0$

$(a-2)(a+2) = 0$

$a_1 = -2$, то неравенство, примет вид:

$x^2 - 2x + 1 > 0$

Откуда $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

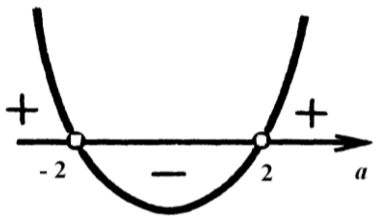
$a_2 = 2$, то неравенство, примет вид:

$x^2 + 2x + 1 > 0$

Откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2) $D > 0$

$a^2 - 4 > 0$



$a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то трехчлен имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Решением служит объединение:

$$x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right).$$

3) $D < 0$

$a^2 - 4 < 0$

$a \in (-2; 2)$, то неравенство, очевидно, выполняется $\forall x \in R$.

Ответ: При $a = -2$, $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

при $a = 2$, $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$;

при $a \in (-2; 2)$, $x \in R$.

Пример 62. Решите неравенство:

$x^2+3ax-a>0$.

Решение.

$D=9a^2+4a$

Рассмотрим три случая:

1) $D=0$

$9a^2+4a=0$

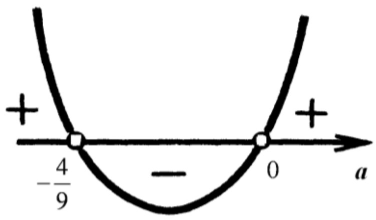
$a(9a+4)=0$

$a_1=0 \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

$a_2=-\dfrac{4}{9} \Rightarrow x=\dfrac{2}{3} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

2) $D>0$

$9a^2+4a>0$



$a\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{9}\right)\cup(0;+\infty)$, тогда:

$x_{1,2}=\dfrac{-3a\pm\sqrt{9a^2+4a}}{2}$

Решением служит объединение:

$x\in\left(-\infty;\dfrac{-3a-\sqrt{9a^2+4a}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3a+\sqrt{9a^2+4a}}{2};+\infty\right)$.

3) $D<0$

$9a^2+4a<0$

$a\in\left(-\dfrac{4}{9};0\right)$, то неравенство справедливо $\forall x\in R$.

Ответ: При $a=0$, $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

при $a=-\dfrac{4}{9}$, $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{9}\right)\cup(0;+\infty)$, $x\in\left(-\infty;\dfrac{-3a-\sqrt{9a^2+4a}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3a+\sqrt{9a^2+4a}}{2};+\infty\right)$;

при $a\in\left(-\dfrac{4}{9};0\right)$, $x\in R$.

Пример 63. Решите неравенство:

$x-2x^2+a-1<0$.

Решение.

$-2x^2+x+a-1<0$

Умножив на -1, получим:

$2x^2 - x - a + 1 > 0$
$D = 1 - 8(1-a) = 1 - 8 + 8a = 8a - 7$

Рассмотрим три случая:

1) $D = 0$

$8a - 7 = 0$

$a = \frac{7}{8}$

Подставляем значение a в неравенство:

$2x^2 - x - \frac{7}{8} + 1 > 0$

$2x^2 - x + \frac{1}{8} > 0$

$16x^2 - 8x + 1 > 0$

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$D = 64 - 64 = 0$

$x = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

Откуда $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

2) $D > 0$

$8a - 7 > 0$

$a > \frac{7}{8}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8a-7}}{4}$

$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{8a-7}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{8a-7}}{4}; +\infty\right)$.

3) $D < 0$

$8a - 7 < 0$

$a < \frac{7}{8}$

Тогда $x \in R$.

Ответ: При $a = \frac{7}{8}$, $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$;

при $a > \frac{7}{8}$, $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{8a-7}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{8a-7}}{4}; +\infty\right)$;

при $a < \frac{7}{8}$, $x \in R$.

Пример 64. Решите неравенство:

$ax^2 + x + 1 > 0$.

Решение.

1. При $a = 0$ неравенство принимает вид $x + 1 > 0$, поэтому $x > -1$.

2. При $a \neq 0$:

$D=1-4a$

Возможны следующие случаи:

2.1. $D=0$

$1-4a=0$

$a=\frac{1}{4}$

Неравенство примет вид:

$\frac{1}{4}x^2+x+1>0$

$\frac{1}{4}x^2+x+1=0$

$x^2+4x+4=0$

$D=16-16=0$

$x=\frac{-4}{2}=-2$

$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

2.2. $D<0$

$1-4a<0$

$4a>1$

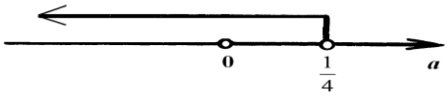
$a>\frac{1}{4}$, то неравенство справедливо $\forall x\in R$.

2.3. $D>0$

$1-4a>0$

$4a<1$

$a<\frac{1}{4}$



Тогда:

$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$

$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}$

Решением служит объединение:

$x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a};+\infty\right)$.

Здесь возможны два случая:

1) $a\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$ — в этом случае, ветви параболы направлены вверх.

Упорядочим точки x_1 и x_2.

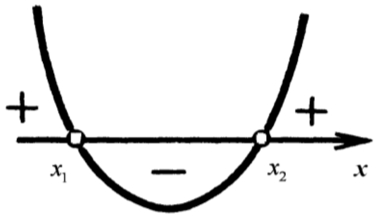
Подставим любое значение *a*, из промежутка $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ в x_1 и x_2.

Например, $a=0,2$, тогда:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-0,8}}{0,4}=\frac{-1-\sqrt{0,2}}{0,4}=\frac{-1-0,4}{0,4}=\frac{-1,4}{0,4}=-3,5$$

$$x_2=\frac{-1+0,4}{0,4}=\frac{-0,6}{0,4}=-1,5$$

Отсюда, $x_1<x_2$.



$$x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a};+\infty\right)$$

2) $a\in(-\infty;0)$ — в этом случае, ветви параболы направлены вниз.

Упорядочим точки x_1 и x_2.

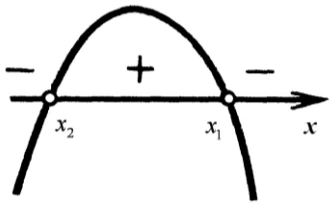
Подставим любое значение *a*, из промежутка $(-\infty;0)$ в x_1 и x_2.

Например, $a=-1$, тогда:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4}}{-2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{-1-2,2}{-2}=\frac{-3,2}{-2}=1,6$$

$$x_2=\frac{-1+2,2}{-2}=\frac{1,2}{-2}=0,6$$

Отсюда, $x_2<x_1$.



$$x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a};\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$$

Ответ: При $a=0$, $x\in(-1;+\infty)$;

при $a=\frac{1}{4}$, $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$;

при $a>\frac{1}{4}$, $x\in R$;

при $a\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$, $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a};+\infty\right)$;

при $a\in(-\infty;0)$, $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a};\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$.

Пример 65. Решите неравенство:

$(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3>0$.

Решение.

1. При $m=1$ неравенство принимает вид:

$-4x-2>0$

$-4x>2$

$x<-\frac{1}{2}$

2. При $m\neq 1$:

$D=(m+1)^2-(m-1)(m-3)=\cancel{m^2}+2m+1\cancel{-m^2}+4m-3=6m-2$

Возможны следующие случаи:

2.1. $D=0$

$6m-2=0$

$6m=2$

$m=\frac{1}{3}$

Неравенство примет вид:

$\left(\frac{1}{3}-1\right)x^2-2\left(\frac{1}{3}+1\right)x+\frac{1}{3}-3>0$

$-\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}>0$

$-2x^2-8x-8>0$

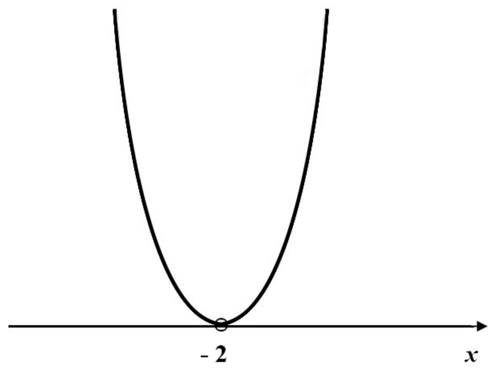
$2x^2+8x+8<0$

$x^2+4x+4<0$

$x^2+4x+4=0$

$D=16-16=0$

$x=\frac{-4}{2}=-2$



$x\in\varnothing$

2.2. $D<0$

$6m-2<0$

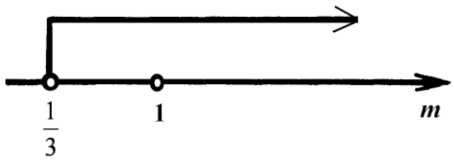
$m<\frac{1}{3}$

$x\in\varnothing$

2.3. $D>0$

$6m-2>0$

$m>\dfrac{1}{3}$



Тогда:

$$x_1=\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}$$

$$x_2=\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}$$

Здесь возможны два случая:

1) $m\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ — в этом случае, ветви параболы направлены вниз.

Упорядочим точки x_1 и x_2.

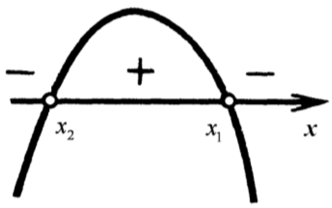
Подставим любое значение *m*, из промежутка $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ в x_1 и x_2.

Например, $m=0,5$, тогда:

$$x_1=\frac{0,5+1-\sqrt{3-2}}{-0,5}=\frac{1,5-\sqrt{1}}{-0,5}=\frac{0,5}{-0,5}=-1$$

$$x_2=\frac{1,5+1}{-0,5}=\frac{2,5}{-0,5}=-5$$

Отсюда, $x_2<x_1$.



$$x\in\left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1};\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right).$$

2) $m\in(1;+\infty)$ — в этом случае, ветви параболы направлены вверх.

Упорядочим точки x_1 и x_2.

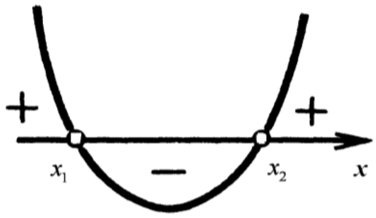
Подставим любое значение *m*, из промежутка $(1;+\infty)$ в x_1 и x_2.

Например, $m=2$, тогда:

$$x_1=\frac{3-\sqrt{10}}{1}=3-3,1=-0,1$$

$$x_2=\frac{3+\sqrt{10}}{1}=3+3,1=6,1$$

Отсюда, $x_1<x_2$.



$x \in \left(-\infty; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; +\infty\right).$

Ответ: При $m=1$, $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$;

при $m=\frac{1}{3}$, $x \in \varnothing$;

при $m<\frac{1}{3}$, $x \in \varnothing$;

при $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $x \in \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)$;

при $m \in (1; +\infty)$, $x \in \left(-\infty; \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; +\infty\right)$.

Пример 66. Решите неравенство:
$(3k-1)x^2 - 2(2k-1)x + 2k - 1 > 0$.

Решение.

1. При $k=\frac{1}{3}$ неравенство принимает вид:

$-2\left(\frac{2}{3}-1\right)x + \frac{2}{3} - 1 > 0$

$-2\left(-\frac{1}{3}\right)x - \frac{1}{3} > 0$

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} > 0$

$2x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$

2. При $k \neq \frac{1}{3}$:

$D = (2k-1)^2 - (3k-1)(2k-1) = 4k^2 - 4k \cancel{+1} - 6k^2 + 5k \cancel{-1} = -2k^2 + k$

Рассмотрим три случая:

2.1. $D=0$

$-2k^2 + k = 0$

$2k^2 - k = 0$

$k(2k-1) = 0$

$k=0$ или $2k-1=0$

Подставляем $k=0$ и $k=\frac{1}{2}$ в исходное неравенство:

$-1\cdot x>0$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}x^2>0$

$x\in\varnothing$ $\qquad\qquad$ $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

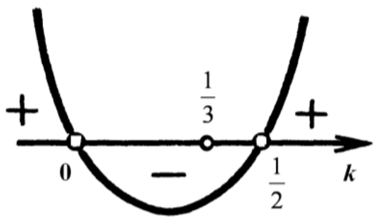
2.2. $D<0$

$-2k^2+k<0$

$2k^2-k>0$

$k_1=0$

$k_2=\frac{1}{2}$



$k\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Если $k\in(-\infty;0)$,то $x\in\varnothing$.

Если $k\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, то $x\in R$.

2.3. $D>0$

$-2k^2+k>0$

$2k^2-k<0$

$k\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Тогда:

$$x_1=\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}$$

$$x_2=\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}$$

Здесь возможны два случая:

1) $0<k<\frac{1}{3}$ — в этом случае, ветви параболы направлены вниз.

Упорядочим точки x_1 и x_2.

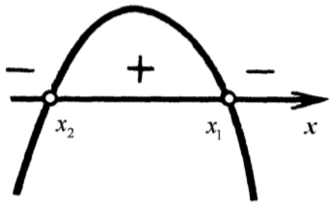
Подставим любое значение k, из промежутка $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ в x_1 и x_2.

Например, $k=0,2$, тогда:

$$x_1=\frac{0,4-1-\sqrt{0,2-0,08}}{0,6-1}=\frac{-0,6-\sqrt{0,12}}{-0,4}=\frac{-0,6-0,3}{-0,4}=\frac{-0,9}{-0,4}=2,25$$

$$x_2=\frac{-0,6+0,3}{-0,4}=\frac{-0,3}{-0,4}=0,75$$

Следовательно, $x_2<x_1$.



$$x\in\left(\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{3k-1};\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}\right)$$

2) $k\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ — в этом случае, ветви параболы направлены вверх.

Упорядочим точки x_1 и x_2.

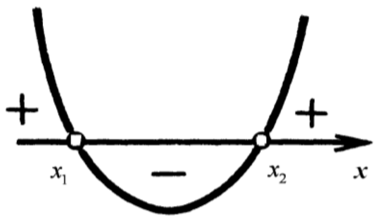
Подставим любое значение *k*, из промежутка $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ в x_1 и x_2.

Например, $k=0,4$, тогда:

$$x_1=\frac{0,8-\sqrt{0,4-0,32}}{1,2-1}=\frac{0,8-\sqrt{0,08}}{0,2}=\frac{0,8-0,2}{0,2}=\frac{0,6}{0,2}=3$$

$$x_2=\frac{0,8+0,2}{0,2}=\frac{1}{0,2}=5$$

Следовательно, $x_1<x_2$.



$$x\in\left(-\infty;\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}\right)\cup\left(\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{3k-1};+\infty\right)$$

Ответ: 1) При $k\le 0$, $x\in\varnothing$;

2) при $k\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $x\in\left(\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{3k-1};\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}\right)$;

3) при $k=\frac{1}{3}$, $x>\frac{1}{2}$;

4) при $k\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$, $x\in\left(-\infty;\frac{2k-1-\sqrt{k-2k^2}}{3k-1}\right)\cup\left(\frac{2k-1+\sqrt{k-2k^2}}{3k-1};+\infty\right)$;

5) при $k\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, $x\in R$;

6) при $k=\frac{1}{2}$, $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Пример 67. При каких значениях k неравенство:

$$\frac{kx^2+3x+4}{x^2+2x+2}<5,$$

справедливо при всех значениях x?

Решение.

Так как $x^2+2x+2 \Rightarrow (x+1)^2+1$ больше нуля $\forall x \in R$, то исходное неравенство равносильно такому неравенству:

$$kx^2+3x+4<5\left(x^2+2x+2\right)$$

$$kx^2+3x+4-5x^2-10x-10<0$$

$$(k-5)x^2-7x-6<0$$

Квадратный трехчлен отрицателен при всех x, если коэффициент при x^2 меньше нуля и $D<0$, т.е. в нашем случае:

$$\begin{cases} k-5<0 \\ 49+24k-120<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k<5 \\ 24k-71<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k<5 \\ k<\dfrac{71}{24} \end{cases}$$

Отсюда получаем $k<\dfrac{71}{24}$.

Ответ: $k \in \left(-\infty;\dfrac{71}{24}\right)$.

Пример 68. Найдите все $b \in R$, при которых трехчлен:

$$y=\left(b^2-1\right)x^2+2(b-1)x+1$$

принимает положительные значения $\forall x \in R$.

Решение.

$$\left(b^2-1\right)x^2+2(b-1)x+1>0$$

Квадратный трехчлен положителен при всех x, если коэффициент при x^2 больше нуля и $D<0$, т.е. в нашем случае:

$$D=(b-1)^2-b^2+1=\cancel{b^2}-2b+1\cancel{-b^2}+1=-2b+2$$

$$\begin{cases} b^2-1>0 \\ -2b+2<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \\ b>1 \end{cases}$$

Отсюда получаем $b>1$.

Ответ: $b \in (1;+\infty)$.

Пример 69. Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-\frac{a}{4}}{x-2a} \prec 0$ выполняется при всех x, таких, что $2 \le x \le 4$.

Решение.

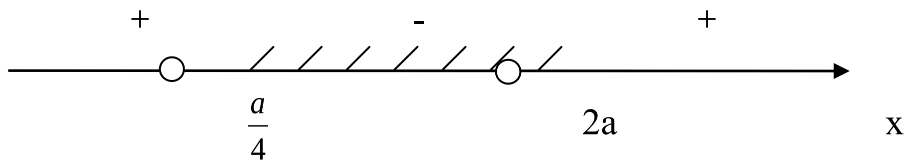
При решении данного неравенства рассмотрим три случая.

1) a = 0.

В этом случае неравенство принимает вид: 1<0. Значит, при a = 0 заданное неравенство не имеет решений.

2) a>0.

Решим заданное неравенство методом интервалов. Точки, в которых значение функции $f(x)=\dfrac{x-\frac{a}{4}}{x-2a}$ равно нулю ($\frac{a}{4}$) или в которых функция не определена (2a), разбивают область ее определения на интервалы, в каждом из которых f сохраняет постоянный знак, который можно определить, вычислив значение f в какой-нибудь точке интервала.



Чтобы неравенство выполнялось при всех x, таких, что $2 \le x \le 4$, необходимо чтобы имела решения следующая система:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{4} \prec 2, \\ 2a \succ 4; \end{cases} \quad \text{значит,} \quad \begin{cases} a \prec 8, \\ a \succ 2; \end{cases} \quad 2 \le a \le 8$$

3) a<0.

В этом случае решение проведите самостоятельно. Сравните результат.

Таких значений a, при которых неравенство $\dfrac{x-\frac{a}{4}}{x-2a} \prec 0$ выполняется при всех x, таких, что $2 \le x \le 4$, нет.

Ответ. $2 \le a \le 8$.

Пример 70. При каких значениях параметра a функция $y = f(x+a)$ является нечетной, где $f(x) = 3^x - \dfrac{27}{3^x}$

Решение.

Найдем область определения функции, а затем воспользуемся определением нечетной функции.

D(y) = R, по свойствам показательной функции.

Так как функция нечетная, то при всех действительных x справедливо равенство y(-x) = -y(x).

Составим соответствующее уравнение.

$$f(x+a) = 3^{x+a} - \frac{27}{3^{x+a}}$$

$$y(-x) = 3^{-x+a} - \frac{27}{3^{-x+a}} \qquad -y(x) = -3^{x+a} + \frac{27}{3^{x+a}}$$

Значит, $3^{-x+a} - \dfrac{27}{3^{-x+a}} = -3^{x+a} + \dfrac{27}{3^{x+a}}$

$$3^{-x+a} - \frac{27}{3^{-x+a}} + 3^{x+a} - \frac{27}{3^{x+a}} = 0$$

$$3^{-x} \cdot 3^{a} - 3^{3} \cdot 3^{x-a} + 3^{x} \cdot 3^{a} - 3^{3} \cdot 3^{-x-a} = 0$$

$3^x \cdot (3^a - 3^{3-a}) - 3^{-x} \cdot (3^a - 3^{3-a}) = 0$

$(3^a - 3^{3-a})(3^x - 3^{-x}) = 0$

Так как решениями данного уравнения должны быть все действительные числа, то $3^a - 3^{3-a} = 0$. («Показательные и логарифмические уравнения и неравенства»). Решите получившееся уравнение самостоятельно.

а = 1,5

Ответ: 1,5.

Пример 71. При каких значениях параметра а число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$?

Решение.

Для того чтобы число $\frac{\pi}{2}$ являлось периодом указанной функции, необходимо выполнение равенства $y(x+\pi) = y(x)$ при всех допустимых х, по определению периодической функции.

Составим соответствующее уравнение и решите его.

$$\frac{\cos 2(x+\frac{\pi}{2})}{3a + \sin 2(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}; \qquad \frac{\cos(2x+\pi)}{3a + \sin(2x+\pi)} = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$$

$$\frac{-\cos 2x}{3a - \sin 2x} = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$$

Данное равенство справедливо лишь при а = 0.

Ответ. 0

Пример 72. Найти все значения а, при которых выражение $\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ имеет смысл при всех действительных числах.

Решение.

Данное задание можно переформулировать следующим образом: найти все значения а, при которых областью определения функции $y = \sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ являются все действительные числа.

Значит, для всех действительных чисел должно выполняться неравенство

$(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \geq 0$.

Сначала запишем уравнение $(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 = 0$

$D = 4(a-1)(-2a-2)$

Чтобы неравенство было справедливо при всех действительных х, то $D \leq 0$

Составим неравенство и решим его.

$4(a-1)(-2a-2) \leq 0$

$(a-1)(a+1) \geq 0$ Неравенство справедливо при всех а, таких что $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Выражение $\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$ имеет смысл при всех действительных числах при таких а, что $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Ответ. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Пример 73. При каком значении m функция $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+\log_{\frac{1}{2}}(m-2x)$ имеет минимум в точке с абсциссой, равной 6,5?

Решение.

Найдем область определения функции.

$\begin{cases} x-5\succ 0, \\ m-2x\succ 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\succ 5, \\ x\prec \dfrac{m}{2}; \end{cases}$ Значит, D(y) = $\left(5;\dfrac{m}{2}\right)$

Тогда функцию можно записать в следующем виде: $y=\log_{\frac{1}{2}}((x-5)(m-2x))$, т.е. $y=\log_{\frac{1}{2}}(-2x^2+(10+m)x-5m)$

Ветви квадратичной функции $f(x)=-2x^2+(10+m)x-5m$ направлены вниз, значит, она имеет максимум в точке x_0, являющейся абсциссой вершины параболы. («Квадратные уравнения и неравенства») Точка максимума квадратичной функции совпадает с точкой минимума функции $y=\log_{\frac{1}{2}}(-2x^2+(10+m)x-5m)$ в силу того, что функция вида $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ монотонно убывает при t > 0.

Найдем абсциссу вершины квадратичной функции, а затем найдите m.

m = 13 .

Ответ. 13.

Пример 74. Найти все положительные значения a, при которых область определения функции $y=(a^{x+3}\cdot a^2+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-(\sqrt[3]{a})^{27})^{0,5}$ не содержит двузначных натуральных чисел.

Решение.

Областью определения заданной функции является множество таких чисел, которые обращают неравенство $a^{x+3}\cdot a^2+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-(\sqrt[3]{a})^{27}\geq 0$ в верное.

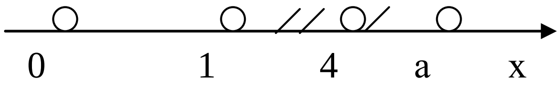
Запишем левую часть неравенства в виде произведения.

$(a^4-a^x)\cdot(x^5-a^5)\geq 0$ при x > 0 и x ≠ 1, a > 0 и a ≠1.

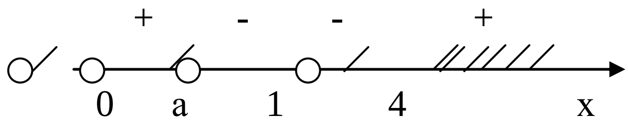
Решим данное неравенство методом интервалов («Свойства функции»). Точки, в которых значение функции $f(x)=(a^4-a^x)\cdot(x^5-a^5)$ равно нулю (4; a), разбивают область ее определения на интервалы, в каждом из которых f сохраняет постоянный знак, который можно определить, вычислив значение f в какой-нибудь точке интервала.

Рассмотрим возможные варианты расположения числа a. Учитывая при этом, что $f(x)\geq 0$

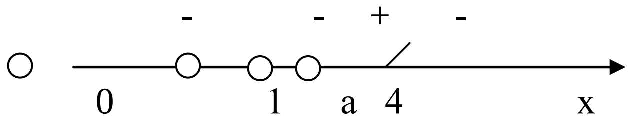
- - + -



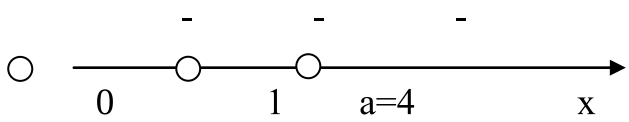
Выделенный интервал не содержит двузначных натуральных чисел при $a \in [4;10)$.



Выделенные интервалы содержат двузначные натуральные числа.



Выделенный интервал не содержит двузначных натуральных чисел при $a \in (1;4]$.



Решением неравенства в этом случае является одно число 4.

Ответ. (1; 10)

Пример 75. При каком значении параметра касательная, проведенная к графику функции $y = 2x + \frac{a}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, параллельна прямой $y = -5x + 4$?

Решение.

Что значит касательная, проведенная к графику функции в точке параллельна некоторой прямой? Производная функции в точке касания равна угловому коэффициенту прямой.

Найдем производную функции $y = 2x + \frac{a}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

$y'(1) = 2 - a$

Составьте соответствующее уравнение и решите его самостоятельно.

а = 7

Ответ. 7.

Пример 76. При каких значениях параметра а функция $y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ монотонно убывает на всей числовой оси?

Решение.

При каком условии функция убывает на всей числовой прямой?

Ее производная неположительна на всей числовой прямой.

Найдем производную функции, составим соответствующее неравенство и решим его.

$y' = 3(a+2)x^2 - 6ax + 9a$

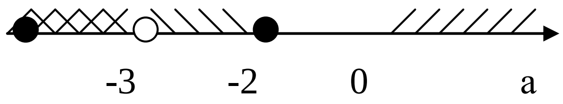
$3(a+2)x^2 - 6ax + 9a \le 0$

$$3(a+2)x^2-6ax+9a=0$$

$$D=-72a(a+3)$$

Чтобы неравенство выполнялось при всех действительных x, необходимо выполнение двух условий.

$$\begin{cases} a+2 \prec 0, \\ -72a(a+3)\le 0 \end{cases}$$



$a\in(-\infty;-3]$

Ответ. $(-\infty;-3]$

Пример 77. При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+ax+7$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение.

Данное задание выполняется аналогично предыдущему.

Производная функции неотрицательна на всей числовой прямой.

Составим соответствующее неравенство и решим его.

$f'(x)=2x^2-2ax+a$, т.е. $2x^2-2ax+a\ge 0$

$D=4a^2-8a=4a(a-2)$ Чтобы неравенство выполнялось при всех действительных x, необходимо чтобы $4a(a-2)\le 0$ (так как коэффициент при x^2 положителен). Неравенство верно при $a\in[0;2]$. Выберем наибольшее.

Ответ. 2.

Пример 78. При каком значении параметра a значения функции $y=x^3-6x^2+9x+a$ в точке x=2 и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

Функция определена на всей числовой прямой. Достаточно легко найти точки экстремума данной функции. («Производная и ее применения»,)

x = 1, x = 3 – точки экстремума функции.

Найдем значение функции в точках экстремума и в точке x=2.

y(3) = a;

y(2) = 2+a;

y(1) = 4+a.

Так как порядок чисел не определен, то необходимо проверить все комбинации (их 6).

Например, проверим порядок: a; 4+a; 2+a.

$\begin{cases} 4+a=aq, \\ 2+a=(4+a)q \end{cases}$ Решая эту систему, получим: $\begin{cases} q=-0{,}5, \\ a=-\frac{8}{3} \end{cases}$

При $a=-\frac{8}{3}$ указанные числа образуют геометрическую последовательность.

Ответ. $-\frac{4}{3}$, $-\frac{8}{3}$.

Пример 79. При каких значениях а уравнения $\sin^2 x = 1$ и $a \cdot \cos x = \sin 2x$ равносильны?

Решение.

Очевидно, что решением первого уравнения является множество чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n – целое число.

Решим второе уравнение.

$a \cdot \cos x = \sin 2x$,

$\sin 2x - a \cdot \cos x = 0$,

$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - a \cdot \cos x = 0$,

$\cos x\,(2 \cdot \sin x - a) = 0$

$\cos x = 0$ или $(2 \cdot \sin x - a) = 0$,

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, п – целое число, $\sin x = \frac{a}{2}$.

Уравнения равносильны только тогда, когда уравнение $\sin x = \frac{a}{2}$ не имеет решений, либо $\sin x = 1$, либо $\sin x = -1$. Значит, $\left|\frac{a}{2}\right| \geq 1$, т.е. $|a| \geq 2$.

Ответ. Заданные уравнения равносильны при таких значениях а, что $|a| \geq 2$.

Пример 80. Найдите все значения р, при которых уравнение $4\sin^3 x = p - 3\cos 2x$ не имеет корней.

Решение.

$$4\sin^3 x = p - 3(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$4\sin^3 x + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = p$$

$$4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 3 = p$$

У этого уравнения нет корней, если р не лежит во множестве значений левой части. Найдем множество значений функции.

$y = 4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 3$, $y = 2\sin^2 x(2\sin x - 3) + 3$

$-1 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq 2\sin^2 x \leq 2$, $-5 \leq 2\sin x - 3 \leq -1$,

$$-10 \leq 2\sin^2 x(2\sin x - 3) \leq 0$$

$$-7 \leq 2\sin^2 x(2\sin x - 3) + 3 \leq 3$$

Значит, уравнение не имеет корней при $p \in (-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$

Ответ. $(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$

Пример 81. Найдите все значения р, при которых уравнение $7 - 2\cos x = p(1 + tg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

$7-2\cos x = p(1+tg^2 x)$, $\quad 7-2\cos x = \dfrac{p}{\cos^2 x}$, так как $\cos x \neq 0$, то

$7\cos^2 x - 2\cos^3 x = p$

Это уравнение имеет хотя бы один корень, если p лежит во множестве значений левой части. Найдем множество значений функции $y = 7\cos^2 x - 2\cos^3 x$, используя производную, т.е. найдем наибольшее и наименьшее значение функции.

Пусть $\cos x = t$

Рассмотрим функцию $y(t) = 7t^2 - 2t^3$, определенную при $t \in [-1;1]$ $y'(t) = 14t - 6t^2$

Значит, t = 0 и t = 7/3 – критические точки функции, но t = 7/3 не принадлежит области определения. Значит, наибольшее и наименьшее значение функция принимает при t = 0 или на концах отрезка.

y(-1) = 9,
y(0) = 0,
y(1) = 5.

Множество значений функции $y = 7\cos^2 x - 2\cos^3 x$, учитывая, что $\cos x \neq 0$, - $(0;9]$.

Заданное уравнение имеет хотя бы один корень, если $p \in (0;9]$

Ответ. $(0;9]$

Пример 82. Найти значения параметра, при котором уравнение $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = a \quad 0 \prec x \prec \dfrac{\pi}{2}$ имеет решение.

Решение.

Выполните задание самостоятельно.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$, заданную на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Найдем ее множество значений, для этого найдем производную и точки экстремума.

$f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. $\quad f'(x) = 0$, т.е. $\quad -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$

На интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ данное уравнение имеет единственный корень - $\dfrac{\pi}{4}$.

Значит, функция f имеет единственную критическую точку.

Найдем значение функции в точке минимума. $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$

На указанном интервале: $\frac{1}{\sin x} \succ 1$ и $\frac{1}{\cos x} \succ 1$.

Каково множество значений функции? $E(f) = \lfloor 2\sqrt{2}; +\infty)$

При каких значениях параметра заданное уравнение имеет решение?

$a \in \lfloor 2\sqrt{2}; +\infty)$

Ответ. $\lfloor 2\sqrt{2}; +\infty)$

Пример 83. Решите неравенство $a \cdot 2^x \le a^2$.

Решение.

Рассмотрим три случая:

- a = 0

Какой вид примет неравенство?

$0 \le 0$. Данное неравенство верно при любых значениях x.

- a < 0

Какой вид примет неравенство? Решите его. Сравните результат.

$2^x \ge a$. Данное неравенство верно при любых значениях x по свойству показательной функции. («Свойства функции»)

- a > 0

Какой вид примет неравенство?

$2^x \le a$, $x \le \log_2 a$.

Ответ. Если a ≤ 0, то решением неравенства является любое действительное число, если a > 0, то $x \le \log_2 a$.

Пример 84. Найти значения параметра, при которых уравнение имеет единственный корень $2\lg(x+3) = \lg(ax)$.

Решение.

Запишем данное уравнение в виде: $\lg(x+3)^2 = \lg(ax)$

В силу монотонности логарифмической функции при всех допустимых значениях x уравнение $(x+3)^2 = ax$ должно иметь один корень при $x \succ 0$.

$x^2 + (6-a)x + 9 = 0$. Уравнение имеет один корень, значит D = 0.

$D = a^2 - 12a$, $a^2 - 12a = 0$ при a = 0 или a = 12

Но при a = 0 логарифм в правой части уравнения не определен.

Значит, a = 12.

Ответ. 12.

Пример 85. При каких a большее из двух чисел $5a-1$ и $|2a|$ равно квадрату меньшего?

Решение.

Очевидно, что для решения этого задания необходимо решить совокупность двух систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5a-1\succ|2a|,\\ 5a-1=|2a|^2,\end{cases}\\ \begin{cases}5a-1\prec|2a|,\\ |2a|=(5a-1)^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему.

$$\begin{cases}5a-1\succ|2a|,\\ 5a-1=|2a|^2,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}5a-1\succ|2a|,\\ 4a^2-5a+1=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}5a-1\succ|2a|,\\ \left[\begin{array}{l}a=1,\\ a=0{,}25.\end{array}\right.\end{cases}$$

Проверим, являются ли корни уравнения 1 и 0,25 решениями неравенства $5a-1\succ|2a|$.

1 – решение неравенства, а значит, и системы.

0,25 не является решением неравенства, а значит, и системы.

$\frac{6-\sqrt{11}}{25}$ – решение системы.

$\frac{6+\sqrt{11}}{25}$ не является решением системы.

Ответ. 1, $\frac{6-\sqrt{11}}{25}$

Пример 86. При каких значениях а сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x?

Решение.

Решите задание самостоятельно, а затем расставьте приведенные ниже части решения в необходимом порядке, записав их номера без запятых и пробелов в прямоугольнике.

$D=36-4(5-a)=4(4+a)$, так как уравнение должен иметь хотя бы один корень, то $D\geq 0$.

$t=-3-\sqrt{4+a}$ или $t=-3+\sqrt{4+a}$

$5\leq a\leq 12$

Значения а из отрезка $[5;12]$ соответствуют всем предыдущим условиям.

Ответ. $[5;12]$